
Diskrete Mathematik

Teilbarkeit

Christoph Dohmen
Judith Coenen

17. Mai 2006

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung
2. Der größte gemeinsame Teiler
3. Division mit Rest
4. Der „Euklid’sche Algorithmus“
5. Das kleinste, gemeinsame Vielfache

1 Einleitung

- Eine Zahl d „teilt“ eine Zahl a , wenn es eine Zahl q gibt mit

$$a = q * d$$

Hierfür schreiben wir $d|a$. a heißt **Vielfaches** von d .

Die Negation (ein solches q existiert nicht) wird beschrieben durch $d \nmid a$.

- Es gilt, dass jedes a die Teiler 1 , -1 , a und $-a$ hat.
- Beispiel:
 - $4|12$, da $12 = 4 * 3$.

- Es gilt z.B. folgendes:

1. $d \mid 0 \quad \forall d$
2. $0 \mid a \Leftrightarrow a = 0$
3. $d \mid a \wedge a \mid b \Rightarrow d \mid b$
4. $d \mid a \Rightarrow db \mid ab$
5. $d \mid a \wedge e \mid b \Rightarrow de \mid ab$
6. $d \mid a \wedge d \mid b \Rightarrow d \mid ax + by \quad \forall x, y$
7. $d \mid a \Rightarrow d \mid ab \quad \forall b$
8. $d \mid a \Rightarrow d \mid -a$
9. $d \mid a \Rightarrow -d \mid a$
10. $d \mid a \wedge a \neq 0 \Rightarrow 1 \leq |d| \leq |a|$
11. $a \mid b \wedge b \mid a \Leftrightarrow a = \pm b$

- Sehen wir uns Punkt 3 z.B. genauer an:

$$d \mid a \text{ und } a \mid b \Rightarrow d \mid b$$

- Beweis:
 - $a = i*d, b = j*a \rightarrow b = j*a = (i*j) * d$
 - Hieran sieht man nun, dass d mit einem Faktor $(i*j)$ multipliziert b ergibt.
 - Also muss d dann auch b teilen!

Aufgabe 1

- Beweisen Sie Punkt 6:

$$d \mid a \text{ und } d \mid b \Rightarrow d \mid (ax+by) \quad \forall x, y$$

und geben Sie hierfür ein Zahlenbeispiel an!

Lösung Aufgabe 1

- Da $d|a$ und $d|b$, legen wir fest: $a = i*d$ und $b = j*d$.
- Nun soll jedoch gezeigt werden, dass $d|(ax+by)$.
Setzen wir also a und b ein. Dies liefert folgendes:
 $(i*d)x + (j*d)y = d*(ix + jy)$.
Dies bedeutet jedoch, dass die letzte Klammer mit d multipliziert wird, also teilt d auf jeden Fall diese Klammer, also gilt auch $d|(ax+by)$.
- Mögliches Beispiel:
 - $d = 8, a = 24, b = 56, x = 3, y = 4$
 - $8|24$ und $8|56 \rightarrow 8|(72+224) \rightarrow 8|296 \rightarrow 8*37 = 296$

- Seien d, a, b ganze Zahlen mit $d|a$ und $d|b$.
- Dann gilt auch $d|(a+b)$ bzw. $d|(a-b)$.

- Der Beweis ist ein Spezialfall von:

$$d | a \text{ und } d | b \Rightarrow d | (ax + by) \quad \forall x, y$$

für $x = 1, y = 1$ bzw. $x = 1, y = -1$.

- Beispiel:

- Sei d eine Zahl, welche 143 und 169 teilt. Da d dann auch die Differenz teilt, muss d ein Teiler von 26 sein, also 1, 2, 13 oder 26 sein.

Durch Probe erhält man $d = \pm 1$ oder $d = \pm 13$.

- Andererseits erhält man, wenn man 143 und 169 miteinander addiert, 312.

Da gilt $d|(a+b)$, muss d nun nicht nur 143 und 169 teilen, sondern auch 312. Da $(169, 143) = 13$, muss 13 auch 312 teilen. Wir wissen, dass $24 \cdot 13 = 312$.

- Gelte für positive Zahlen a und b , dass d a teilt ($d|a$), dann ist $d = a$ oder $d \leq \frac{a}{2}$.

- Beweis:

- Es ist $a = q \cdot d$. Ist $q = 1$, so ist $d = a$.

Sonst ist

$$q \geq 2$$

und damit

$$a = qd \geq 2d$$

und damit

$$d \leq \frac{a}{2}$$

- Für beliebige, auch negative, Zahlen ergibt sich entsprechend:

- Gelte $d \mid a$, $a \neq 0$.

Dann ist $|d| \mid |a|$ oder $|d| \leq \left\lfloor \frac{|a|}{2} \right\rfloor$.

- Insgesamt gilt abgeschwächt für Zahlen $d \neq 0$, die a teilen $|d| \leq |a|$.

- Beispiel:

- $d = -13$, $a = 182$

$$|-13| < |182| \Rightarrow 13 = \frac{182}{14}$$

hier ist also $|d|$ auch kleiner als $\left\lfloor \frac{|a|}{2} \right\rfloor$.

- Eine Zahl a , die von einem positivem d geteilt wird, liege zwischen $-(d-1)$ und $(d-1)$, so ist $a = 0$.
- Annahme:

Sei $a \neq 0$: Dann ist $|a| \leq d - 1 < |d|$.

Im Widerspruch zu $|d| \leq |a|$. Damit gilt $a = 0$.

2 Der größte gemeinsame Teiler (ggT)

- $T_a = \{d \mid a\}$ heißt die **Teilmengen** von a .
- Elemente aus

$$T_a \cap T_b$$

heißen gemeinsame Teiler von a und b . Für positive a und b heißt

$$\max(T_a \cap T_b)$$

größter gemeinsamer Teiler von a und b .

Schreibweise **(a,b)** .

Aufgabe 2

- Bestimmen Sie T_{16} !

Lösung Aufgabe 2

- $T_{16} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\}$

- Außerdem gilt:

$$T_1 = \{-1, 1\}, \quad T_0 = \mathbb{Z}, \quad T_a = T_{-a}, \quad |T_a| < \infty \quad \text{für } a \neq 0$$

- Es gilt:
 - $(a,b) = (b,a)$
 - $(a,0) = a$
 - $1 \leq (a,b) \leq \min(a,b)$
 - $(0,0) = 0$
- Ist $(a,b) = 1$, dann sind a und b teilerfremd, da sie als einzigen gemeinsamen Teiler die 1 haben.
- $(a,b) = b \rightarrow b|a$
- Beweis:
 - b ist gemeinsamer Teiler von a und b . Deswegen teilt b dann natürlich auch a .

- $(a, b) = d \Rightarrow \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \right) = 1$
- Klar, dass $\frac{a}{d}$ bzw. $\frac{b}{d}$ ganzzahlig und positiv. Sei $c = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \right)$

Dann ist

$$\frac{a}{d} = q_1 c, \quad \frac{b}{d} = q_2 c$$
$$a = q_1 c d, \quad b = q_2 c d$$

also $cd \in T_a \cap T_b$. Damit $cd \leq (a, b) = d$ und somit $c \leq 1$.

Da $c = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \right) \geq 1$ ergibt sich $c = 1$.

- Beispiel:

- $a = 12, b = 8 \rightarrow d = 4.$

- Dann haben wir $(12,8) = 4$. Dies bedeutet dann jedoch, dass nach Voraussetzung gilt :

$$\left(\frac{12}{4}, \frac{8}{4}\right) = (3,2) = 1.$$

Hier sehen wir nun, dass 3 und 2 teilerfremd sind, wie es auch die Voraussetzung zeigt.

3 Division mit Rest

- Seien a und b ganze Zahlen mit $b > a > 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen q und r mit
$$b = q * a + r \text{ und } 0 \leq r < a.$$
- Eine andere für Programmierer bekanntere Schreibweise für die Division mit Rest ist „modulo“.

- Hat man z.B. folgende Berechnung eines Restes:

$$15 = 1 * 12 + 3,$$

so erhält man in Modulo-Schreibweise folgendes:

$$15 \equiv 3 \text{ mod } 12$$

- Der Satz sichert Existenz und Eindeutigkeit von q und r

1. Existenz: Sei $M = \{t \mid b - ta \geq 0\}$. M ist nicht leer (wähle t "klein genug") und nach oben beschränkt. Setze $q = \max M$ und $r = b - qa$. Damit $r \geq 0$ ist klar.

Wäre $r \geq a$, so wäre auch $b - (q + 1)a = b - qa - a = r - a \geq 0$ und damit $q + 1 \in M$ im Widerspruch zu $q = \max M$

2. Eindeutigkeit: Seien $qa + r = q'a + r'$ mit $0 \leq r, r' \leq |a|$
 $(q - q')a = r' - r$
Also: a teilt $r' - r$. $r' - r$ liegt aber zwischen $-(a - 1)$ und $(a - 1)$.
Damit ist $r' - r = 0$ und damit wiederum $r' = r$.
Wegen $a \neq 0$ aber auch $q - q' = 0$, also $q = q'$

q ist durch $\frac{b}{a} - 1 < q \leq \frac{b}{a}$ eindeutig festgelegt

- Beispiel:
 - $b = 15, a = 4$
 - Damit $M = \{t \mid b - t * a \geq 0\}$ gilt, kann t höchstens 3 sein.
Hier sieht M dann folgendermaßen aus $M = \{0, 1, 2, 3\}$.
In diesem Fall ist dann $q = \max M = 3$ und $r = 15 - 3 * 4 = 3$.

- Jeder gemeinsame Teiler von a und b ist auch Teiler vom Rest r .
- Beweis:
 - Sei t Teiler von a und b . Setzen wir $a = i * t$ und $b = j * t$.
 - Sehen wir uns nun folgende Gleichung: $b = q * a + r$ an und formen nach r um.
 - So erhalten wir $r = b - q * a$. Setzen wir nun für a und b ein, so erhalten wir
$$r = j * t - q * (i * t) = t * (j - i * q).$$
 - Die Klammer wird also mit t multipliziert, also muss t Teiler vom Rest r sein.

Aufgabe 3

- Beweisen Sie, dass t auch Teiler von b ist unter der Voraussetzung, dass $t|a$ und $t|r$!

Lösung Aufgabe 3

- Wir gehen wie eben vor und setzen für a und r
 $a = i * t$ und $r = j * t$ ein.

- So erhalten wir

$$b = q * a + r = q * i * t + j * t = t * (i * q + j).$$

- Also ist auch t Teiler von b !

- Das gerade Bewiesene bedeutet nun jedoch, dass gilt:

$$T_a \cap T_b = T_b \cap T_r$$

- Das heißt nun, dass alle gemeinsamen Teiler von a und b auch Teiler vom Rest r sind.
- Der ggT bleibt nun auch erhalten, und es gilt
$$(b,a) = (a,r).$$
- Das heißt, dass b und a den gleichen ggT haben wie a und r .
- Die wiederholte Anwendung davon führt zum „Euklid’schen Algorithmus“

Der „Euklid'sche Algorithmus“

- Seien a und b Zahlen mit $b > a > 0$.
 - 1) Berechne die Zerlegung $b = q \cdot a + r$
 - 2.1) Ist $r = 0$, so ist $(a, b) = a$.
 - 2.2) Ist $r \neq 0$, so ist $(b, a) = (a, r)$.
 - Setze $b = a$ und $a = r$ und gehe zu 1.
- Führe diese Vorgehensweise solange fort, bis irgendwann die Gleichung ohne Rest aufgeht.
- Der ggT ist also der letzte positive Rest (in der vorletzten Zeile) des Euklid'schen Algorithmus

Aufgabe 4

- Berechnen Sie $(212, 112)$ am Beispiel des „Euklid'schen Algorithmus“!

Lösung Aufgabe 4

- Zu berechnen ist $(212, 112)$

1. $212 = 1 * 112 + 100$

2. $112 = 1 * 100 + 12$

3. $100 = 8 * 12 + \underline{4}$

4. $12 = 3 * \underline{4} (=12)$

5. Ende des Algorithmus'!

- $(212, 112) = 4$

Aufgabe 5

- Berechnen Sie $(212, 117)$!

Lösung Aufgabe 5

- Zu berechnen ist (212, 117)

1. $212 = 1 \cdot 117 + 95$

2. $117 = 1 \cdot 95 + 22$

3. $95 = 4 \cdot 22 + 7$

4. $22 = 3 \cdot 7 + \underline{1}$

5. $7 = 7 \cdot 1$

- 212 und 117 sind also teilerfremd, da sie die 1 als einzigen gemeinsamen Teiler haben!

- Ist $(a,b) = d$, so existieren ganze Zahlen a' und b' mit $d = a*a' + b*b'$. Insbesondere gilt für teilerfremde Zahlen $1 = a*a' + b*b'$.
- Beispiel:
 - $a = 42, b = 18$
 - Damit haben wir $(42, 18) = 6$.
 - Somit muss es nun zwei ganze Zahlen a' und b' geben, wobei dann gilt:
$$a*a' + b*b' = d,$$
in unserem Beispiel also:
$$42*a' + 18*b' = 6.$$
 - Setzen wir $a' = 1$ und $b' = -2$, so erhalten wir:
$$42*1 + 18*(-2) = 6.$$

- Beweis:
 - Um den Beweis zu führen, wenden wir den Euklid'schen Algorithmus an, diesmal jedoch rückwärts:
 - Sehen wir uns Aufgabe 4 nochmal an.
 - $4 = 100 - 8 \cdot 12$ und $12 = 112 - 1 \cdot 100$
 $4 = 100 - 8 \cdot (112 - 1 \cdot 100)$
 $4 = 212 - 112 - 8 \cdot (112 - (212 - 112))$
 $4 = 212 - 112 - 8 \cdot 112 + 8 \cdot 212 - 8 \cdot 112$
 $4 = 9 \cdot 212 - 17 \cdot 112$

Aufgabe 6

- Bestimmen Sie $(42,16)$ und zeigen Sie anhand der rückwärtigen Anwendung des Euklid'schen Algorithmus, dass gilt: $d = a*a' + b*b'$.

Lösung Aufgabe 6

- $(42, 16) = 2$

1. $42 = 2 \cdot 16 + 10$

2. $16 = 1 \cdot 10 + 6$

3. $10 = 1 \cdot 6 + 4$

4. $6 = 1 \cdot 4 + 2$

5. $4 = 2 \cdot 2$

1. $2 = 6 - 1 \cdot 4, 4 = 10 - 1 \cdot 6, 6 = 16 - 1 \cdot 10, 10 = 42 - 2 \cdot 16$

2. $2 = 6 - 1 \cdot (10 - 1 \cdot (16 - 1 \cdot (42 - 2 \cdot 16)))$

3. $2 = 16 - 1 \cdot (42 - 2 \cdot 16) - 1 \cdot ((42 - 2 \cdot 16) - 1 \cdot (16 - 1 \cdot (42 - 2 \cdot 16)))$

4. $2 = 16 - 42 + 2 \cdot 16 - 1 \cdot 42 + 2 \cdot 16 + 1 \cdot 16 - 1 \cdot 42 + 2 \cdot 16$

5. $2 = 8 \cdot 16 - 3 \cdot 42$

Diese Lösung ist nicht eindeutig. Es gibt unendlich viele Lösungen, also unendlich viele a' und b' .

- Allgemein sieht der „Euklid'sche Algorithmus“ dann folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} b &= q_1 a + r_2 && \text{mit } 0 < r_2 < a \\ a &= q_2 r_2 + r_3 && \text{mit } 0 < r_3 < r_2 \\ r_2 &= q_3 r_3 + r_4 && \text{mit } 0 < r_4 < r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= q_{n-1} r_{n-1} + r_n && \text{mit } 0 < r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &= q_n r_n \end{aligned}$$

- Der Abbruch erfolgt wegen

$$a > r_2 > \dots > r_n > 0$$

zwingend, und es gilt

$$(b, a) = (a, r_2) = \dots = (r_{n-1}, r_n) = r_n$$

oder allgemeiner

$$T_a \cap T_b = T_b \cap T_r = \dots = T_{r_n} = T_{(a,b)}.$$

- Die Anzahl der Schritte beim „Euklid'schen Algorithmus“ kann beliebig groß werden
- Dies zeigt auch die Fibonacci-Folge, die den Worst-Case darstellt
- Algorithmus angewandt auf der Fibonacci-Folge:

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \quad f_0 = f_1 = 1$$

Berechnung von (f_{n+1}, f_n) :

$$f_{n+1} = 1 * f_n + f_{n-1}$$

$$f_n = 1 * f_{n-1} + f_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f_2 = f_1 + f_0 = 2 * f_1 = 2 * f_0$$

- Es sind also stets n Schritte notwendig!

- Gilt $0 < a < b$, so ist die Zahl der Schritte beim Euklid'schen Algorithmus nicht größer als das Fünffache der Ziffernzahl von a .

- Beweis:

- Per Induktion wird gezeigt : $f_{n+5} > 10 * f_n$.
- $n \rightarrow n+1$: $f_{n+6} = f_{n+5} + f_{n+4} > 10 f_n + f_{n+4} > 10 f_n + 10 f_{n-1} = 10 f_{n+1}$

Diese Induktion liefert fortgeführt :

$$f_{n+5l} > 10^l f_n$$

Ist nun $n > 5l$ bzw. $n \geq 5l + 1$, so ist

$$a = f_{n+1} \geq f_{5l+2} > 10^l * f_2 > 10^l$$

d.h. a besitzt $l + 1$ Ziffern. Besitzt a umgekehrt nur l Ziffern, so muss damit $n \leq 5l$ sein.

- Weiterhin gilt folgendes:
 1. $(ac, bc) = (a, b) * |c|$
 2. Ist d gemeinsamer Teiler von a und b , dann ist
$$\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{(a, b)}{|d|}$$
- Beispiel:
 - $a = 27, b = 18, c = -3$
 - $(27 * (-3), 18 * (-3)) = (27, 18) * |-3|$
 - $(-81, -54) = 9 * |-3|$
 - $27 = 27$

- Beweis: $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{(a, b)}{|d|}$

1.) Multiplikation im euklidschen Algorithmus jeder Zeile mit $|c|$

2.) Nach 1.) ist $(a, b) = \left(\frac{a}{d}d, \frac{b}{d}d\right) = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)|d|$

- Ist $(c,b) = 1$, dann ist $(ac,b) = (a,b)$
- Beweis:
 - Sei $d = (ac,b)$ und $e = (a,b)$.
 - Dann gilt $d|ac$ und $d|ab \rightarrow d|(ac,ab) = (c,b)|a| = |a|$
 - Ebenso gilt $d|b$ und damit $d|(a,b) = e$
 - Umgekehrt gilt: $e|ac$ und $e|b \rightarrow e|(ac,b) = d$ und damit $d = e$.
- Beispiel:
 - $a = 6, c = 5, b = 8$
 - Dann haben wir $(6*5, 8) = (6, 8) = (2*3, 8) = (2, 8) = 2$.

- Ist $(a, b) = 1 \Rightarrow (a^m, b^n) = 1$
- Beweis:
 - Durch Induktion über m folgt zunächst, wie eben gezeigt

$$(a^m, b) = 1.$$

Dann liefert die Induktion über n

$$(a^m, b^n) = 1$$

- Gilt $d|ab$ und $(a, d) = 1 \rightarrow d|b$.
- Beweis:
 - Es ist mit dem gerade Gezeigten $(ab, d) = (b, d)$. Wegen $d|ab$ ist $d = (ab, d) = (b, d)$, und damit $d|b$.

- $\sqrt[n]{a}$ ist ganz oder irrational.

- Beweis:

– Sei $\sqrt[n]{a} = \frac{p}{q}$ mit $(p,q)=1$. Dann ist

$$a = \left(\frac{p}{q}\right)^n$$

$$a * q^n = p^n$$

Insbesondere :

$$p^n \mid a * q^n$$

Nach vorigem Satz ist aber : $(p^n, q^n) = 1$

also :

$$p^n \mid a \quad \text{bzw.} \quad a = l * p^n$$

Damit :

$$l * q^n = 1$$

Deshalb :

$$q = 1$$

Also :

$$\sqrt[n]{a} = p \in \mathbb{Z}$$

5 Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)

- Nun bezeichne V_a die Vielfachen einer Zahl a . Es gilt damit
 1. $0 \in V_a$
 2. $V_0 = \{0\}$
 3. $V_a = V_{-a} = V_{|a|}$
- Es werden jetzt nicht mehr gemeinsame Teiler gesucht, sondern gemeinsame **Vielfache**.

- Für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ ist $\min(V_a \cap V_b \cap \mathbb{N})$
das **kleinste, gemeinsame Vielfache** von a und b .
- Notation: $[a,b]$
- Vereinbarung: $[0,b] = [a,0] = 0$
- Außerdem gilt:
 - $[a,b] = [b,a] = [|a|,|b|]$
 - $[a,b] = |b| \Leftrightarrow a|b$
 - Für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ ist $1 \leq [a,b] \leq |a| * |b|$

Aufgabe 7

- Berechnen Sie $[12, 9]$!

Lösung Aufgabe 7

- $[12, 9] = 36$, da
 $36 = 3 \cdot 12$ und $36 = 4 \cdot 9$ und $(4, 3) = 1$.

- Seien nun $a \neq 0$ und $b \neq 0$. Mit

$$a_1 = \frac{a}{(a, b)}$$

$$b_1 = \frac{b}{(a, b)}$$

ist $(a_1, b_1) = 1$. Jedes gemeinsame Vielfache v von a und b ist darstellbar als $v = q*a = r*b$.

- Wird nun a durch $a_1 * (a, b)$ und b durch $b_1 * (a, b)$ ersetzt, so ergibt sich

$$qa_1 = rb_1.$$

- Damit gilt $b_1 \mid qa_1$.

- Da $(a_1, b_1) = 1$, gilt

$$b_1 \mid q$$
$$b_1 l = \frac{b}{(a, b)} l = q$$

- Daher gilt $v = qa = \frac{ab}{(a, b)} l$
- Jedes Vielfache ist also von der Gestalt

$$\frac{ab}{(a, b)} l, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

- Beispiel:

- $a = 12, b = 9$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{12}{3} = 4, \quad b_1 = \frac{9}{3} = 3$$

damit ist $a_1 = 4$ und $b_1 = 3$ und es gilt : $(4,3) = 1$

$$v = q * a = r * b \Rightarrow v = 3 * 12 = 4 * 9$$

$$q * a_1 = r * b_1 \Rightarrow 3 * 4 = 4 * 3$$

Damit gilt $3 \mid 3 * 4$.

$$(a_1, b_1) = (4,3) = 1 \Rightarrow b_1 \mid 3 = 3 \mid 3$$

$$b_1 * l = \frac{9}{3} * l = q = 3 \Rightarrow 3 * l = 3$$

$$v = 3 * 12 = \frac{108}{3} l \Rightarrow l = 1, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

- Das kleinste, gemeinsame Vielfache ergibt sich (je nach Vorzeichen von a und b) durch $l = \pm 1$.
- Also ergibt sich

$$[a, b] = \frac{|ab|}{(a, b)}.$$

- Dies liefert nun aber

$$(a, b)[a, b] = |ab|$$

- Beispiel:

$$- a = 12, b = 8:$$

$$(12, 8) * [12, 8] = |12 * 8| \Leftrightarrow 4 * 24 = 96 \Leftrightarrow 96 = 96$$

- Dies wiederum eingesetzt bedeutet, dass jedes gemeinsame Vielfache von a und b die Darstellung

$$v = [a, b] * l$$

hat. Damit ist jedes gemeinsame Vielfache auch Vielfaches des kleinsten gemeinsamen Vielfachen, also

$$V_a \cap V_b = V_{[a,b]}$$

- Beispiel:

$$- \quad [4,6] = \frac{4 * 6}{(4,6)} = \frac{24}{2} = 12, \quad V_4 \cap V_6 = V_{[4,6]} = \{\pm 0, \pm 12, \pm 24, \pm 36, \dots\}$$

Aufgabe 8

- Berechnen Sie $V_{16} \cap V_{20}$

Lösung Aufgabe 8

- $[16,20] = \frac{16 \cdot 20}{(16,20)} = \frac{320}{4} = 80, \quad V_{16} \cap V_{20} = V_{[16,20]} = \{\pm 0, \pm 80, \pm 160, \pm 320, \dots\}$