Lineare diophantische Gleichungen

Definition

- Eine Gleichung

$$f(x_1,\ldots,x_n)=0\,,$$

die nur ganzzahlige Lösungen für x_i zulässt, heißt diophantische Gleichung.

Im linearen Fall gilt:

$$\sum_{i=1}^{r} a_i x_i = k, \qquad a_i, x_i, k \in Z$$

Beschränkung

- Beschränkung auf $r = 2$:

$$ax + by = k$$

Existenz einer Lösung

$$ax + by = k$$

mit $a = a_1(a,b)$ und $b = b_1(a,b)$ folgt

$$ax + by = k \Leftrightarrow a_1(a,b)x + b_1(a,b)y = k$$

$$\Leftrightarrow (a,b)(a_1 x + b_1 y) = k \Leftrightarrow \underbrace{(a_1 x + b_1 y)}_{ganzzahlig} = \frac{k}{(a,b)}$$

Es existiert eine Lösung, wenn $(a,b) \mid k$

also

$$\boxed{k = q \cdot (a,b)}$$

Beispiel

$$ax + by = k \Leftrightarrow 20x + 56y = 32$$

Bestimmung des ggT:

$$56 = 2 \cdot 20 + 16$$

$$20 = 1 \cdot 16 + 4$$

$$16 = 4 \cdot 4 + 0$$

$$\Rightarrow (20{,}56) = 4$$

Da $32/4 = 8$, existiert eine Lösung.

Übungsaufgabe

Frankiere einen Brief mit 1 Euro und zwar nur mit 5 Cent und 12 Cent Briefmarken.

a.) Existiert eine Lösung?

Lösung (Übungsaufgabe a.))

$$ax + by = k \Leftrightarrow 5x + 12y = 100$$

Bestimmung des ggT:

$$12 = 2 \cdot 5 + 2$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

$$\Rightarrow (12,5) = 1$$

Da $100 / 1 = 100$, existiert eine Lösung.

Bestimmung einer Lösung

- Es gilt gemäß euklidischem Algorithmus:

$$(a,b) = ax' + by'$$

und somit für die Lösung:

$$k = q \cdot (a,b) = q(ax' + by') = a \cdot qx' + b \cdot qy'$$

Eine Lösung ist somit:

$$\boxed{x_0 = qx'} \qquad \boxed{y_0 = qy'}$$

Beispiel (Fortsetzung)

$$ax + by = k \Leftrightarrow 20x + 56y = 32$$

hier $k = q(a,b) \Leftrightarrow 32 = 8 \cdot 4$

und $(a,b) = ax' + by'$

$$\Leftrightarrow 4 = 20 - 1 \cdot 16$$

$$\Leftrightarrow 4 = 20 - 1(56 - 2 \cdot 20)$$

$$\Leftrightarrow 4 = 56 \cdot (-1) + 20 \cdot 3$$

$$56 = 2 \cdot 20 + 16$$

$$20 = 1 \cdot 16 + 4$$

$$16 = 4 \cdot 4 + 0$$

damit $x_0 = qx' = 8 \cdot 3 = 24$ und

$$y_0 = qy' = 8 \cdot (-1) = -8$$

Übungsaufgabe

Frankiere einen Brief mit 1 Euro und zwar nur mit 5 Cent und 12 Cent Briefmarken.

b.) Bestimme die spezielle Lösung!

Lösung (Übungsaufgabe b.))

$$ax + by = k \Leftrightarrow 5x + 12y = 100$$

hier $k = q(a,b) \Leftrightarrow 100 = 100 \cdot 1$

und $(a,b) = ax' + by'$

$$\Leftrightarrow 1 = 5 - 2 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 1 = 5 - 2(12 - 2 \cdot 5)$$

$$\Leftrightarrow 1 = 5 \cdot (5) + 12 \cdot (-2)$$

$$12 = 2 \cdot 5 + 2$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

damit $x_0 = qx' = 100 \cdot 5 = 500$ und

$$y_0 = qy' = 100 \cdot (-2) = -200$$

Bestimmung der Lösungsmenge(1)

- i.) $ax + by = k$ ii.) $ax_0 + by_0 = k$

$$\Rightarrow ax + by = ax_0 + by_0$$

$$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad (*)$$

mit $a = (a,b)a_1$ und $b = (a,b)b_1$ folgt:

(*) $\backslash (a,b):$

$$a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow a_1(x - x_0) = -b_1(y - y_0)$$

Bestimmung der Lösungsmenge(2)

$$a_1(x-x_0)=-b_1(y-y_0) \Leftrightarrow \frac{a_1(x-x_0)}{b_1}=\underbrace{-(y-y_0)}_{ganzzahlig}$$

Da $(a_1,b_1)=1$, muss b_1 den Faktor $(x-x_0)$ teilen:

$$x-x_0=b_1t \Leftrightarrow x=x_0+b_1t \Leftrightarrow \boxed{x=x_0+\frac{b}{(a,b)}t} \quad t\in Z$$

Analog gilt:

a_1 muss den Faktor $-(y-y_0)$ teilen:

$$-(y-y_0)=a_1t \Leftrightarrow y=y_0-a_1t$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y=y_0-\frac{a}{(a,b)}t} \quad t\in Z$$

Beispiel (Fortsetzung)

$$ax+by=k \Leftrightarrow 20x+56y=32$$

bisher berechnet:

$$(20,56)=4$$

$$x_0 = 24$$
$$y_0 = -8$$

damit folgt:

$$y = y_0 - \frac{a}{(a,b)}t \Leftrightarrow y = -8 - \frac{20}{4}t \Leftrightarrow y = -8 - 5t$$

$$x = x_0 + \frac{b}{(a,b)}t \Leftrightarrow x = 24 + \frac{56}{4}t \Leftrightarrow x = 24 + 14t$$

Übungsaufgabe

Frankiere einen Brief mit 1 Euro und zwar nur mit 5 Cent und 12 Cent Briefmarken.

c.) Bestimme die Lösungsmenge!

Lösung (Übungsaufgabe c.))

$$ax + by = k \Leftrightarrow 5x + 12y = 100$$

bisher berechnet:

$$(12{,}5) = 1$$

$$x_0 = 500$$
$$y_0 = -200$$

damit folgt:

$$y = y_0 - \frac{a}{(a,b)}t \Leftrightarrow y = -200 - \frac{5}{1}t \Leftrightarrow y = -200 - 5t$$

$$x = x_0 + \frac{b}{(a,b)}t \Leftrightarrow x = 500 + \frac{12}{1}t \Leftrightarrow x = 500 + 12t$$

Positive Werte für x und y

$$x = x_0 + \frac{b}{(a,b)} t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -x_0 \frac{(a,b)}{b}$$

$$y = y_0 - \frac{a}{(a,b)} t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq y_0 \frac{(a,b)}{a}$$

Man erhält positive Werte für x und y, wenn

$$\boxed{-x_0 \frac{(a,b)}{b} \leq t \leq y_0 \frac{(a,b)}{a}}$$

Beispiel (Fortsetzung)

$$ax+by=k \Leftrightarrow 20x+56y=32$$

bisher berechnet:

$$(20,56)=4$$
$$x_0=24$$
$$y_0=-8$$

damit folgt:

$$-x_0\frac{(a,b)}{b}\le t\le y_0\frac{(a,b)}{a}\Leftrightarrow -24\frac{4}{56}\le t\le -8\frac{4}{20}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{24}{14}\le t\le -\frac{8}{5}\Leftrightarrow -1.7...\le t\le -1.6$$

Es gibt kein ganzzahliges t, das die Gleichung erfüllt. Es gibt somit auch keine Lösung, bei der x und y positiv sind.

Übungsaufgabe

Frankiere einen Brief mit 1 Euro und zwar nur mit 5 Cent und 12 Cent Briefmarken.

d.) Bestimme die Lösungen mit positiven x und y!

Lösung (Übungsaufgabe d.))

$$ax + by = k \Leftrightarrow 5x + 12y = 100$$

mögliche t berechnen:

$$-x_0 \frac{(a,b)}{b} \leq t \leq y_0 \frac{(a,b)}{a} \Leftrightarrow -500\frac{1}{12} \leq t \leq -200\frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{500}{12} \leq t \leq -40 \Leftrightarrow -41.67 \leq t \leq -40$$

$$t = -40: x = 500 - 480 = 20,\ y = -200 + 200 = 0$$

$$t = -41: y = 500 - 492 = 8,\ y = -200 + 205 = 5$$

Lösungen: 20 5-er, 0 12-er oder 8 5-er, 5 12-er

Übungsaufgabe

Ein Automat soll Wechselgeld in Höhe von 2,30 Euro in 50 Cent und 10 Cent Münzen ausgeben.

Welche Möglichkeiten gibt es?

Lösung (1)

$$50x + 10y = 230$$

ggT: $(50,10) = 10$

Existenz der Lösung: $10 \mid 230 \Rightarrow q = 23$

spezielle Lösung:

a.) $x' = 1, y' = -4$ da $50x' + 10y' = 10$

b.) $x_0 = 23, y_0 = -92$

Lösungsmenge:

$$x = 23 + \frac{10}{10}t = 23 + t, \; y = -92 - \frac{50}{10}t = -92 - 5t$$

Lösung (2)

x, y positiv:

$$\left.\begin{array}{l} x = 23 + t \geq 0 \Rightarrow t \geq -23 \\ y = -92 - 5t \geq 0 \Rightarrow t \leq -\dfrac{92}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow t \in \{-23, -22, -21, -20, -19\}$$

$$t = -23 \Rightarrow x = 0,\ y = 23$$

$$t = -22 \Rightarrow x = 1,\ y = 18$$

$$t = -21 \Rightarrow x = 2,\ y = 13$$

$$t = -20 \Rightarrow x = 3,\ y = 8$$

$$t = -19 \Rightarrow x = 4,\ y = 3$$

Polynomstruktur

Gesucht: Anzahl der Möglichkeiten, wenn x und y positiv sein sollen.

$$ax+by=k \Rightarrow z^{ax+by}=z^k$$

x, y positiv → $x\in\left\{0,1,\ldots,\left\lfloor\frac{k}{a}\right\rfloor\right\}$ und $y\in\left\{0,1,\ldots,\left\lfloor\frac{k}{b}\right\rfloor\right\}$

Polynom für alle möglichen Werte bestimmen:

$$\sum_{x=0}^{\left\lfloor\frac{k}{a}\right\rfloor}\sum_{y=0}^{\left\lfloor\frac{k}{b}\right\rfloor} z^{ax}z^{by} = \sum_{x=0}^{\left\lfloor\frac{k}{a}\right\rfloor} z^{ax}\sum_{y=0}^{\left\lfloor\frac{k}{b}\right\rfloor} z^{by} = \left(1+z^a+\ldots+z^{\left\lfloor\frac{k}{a}\right\rfloor a}\right)\left(1+z^b+\ldots+z^{\left\lfloor\frac{k}{b}\right\rfloor b}\right)$$

Die Anzahl der Möglichkeiten erhält man, in dem man den Vorfaktor vor z^k bestimmt.

Beispiel (Fortsetzung)

$$ax + by = k \Leftrightarrow 20x + 56y = 32$$

$$\Rightarrow z^{20x+56y} = z^{32} \Leftrightarrow z^{20x} z^{56y} = z^{32}$$

$$\sum_{x=0}^{\left\lfloor \frac{32}{20} \right\rfloor} \sum_{y=0}^{\left\lfloor \frac{32}{56} \right\rfloor} z^{20x} z^{56y} = \sum_{x=0}^{1} z^{20x} \sum_{y=0}^{0} z^{56y}$$

$$= (z^0 + z^{20})(z^0) = z^0 + z^{20}$$

$\Rightarrow$ Es gibt keinen Summand mit z^{32}

$\Rightarrow$ Es existiert keine Lösung mit positiven x und y

Beispiel (Brief frankieren)

$$ax + by = k \Leftrightarrow 5x + 12y = 100$$

$$\Rightarrow z^{5x+12y} = z^{100} \Leftrightarrow z^{5x} z^{12y} = z^{100}$$

$$\sum_{x=0}^{\left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor} \sum_{y=0}^{\left\lfloor \frac{100}{12} \right\rfloor} z^{5x} z^{12y} = \sum_{x=0}^{20} z^{5x} \sum_{y=0}^{8} z^{12y}$$

$$= (z^0 + z^5 + \ldots + z^{100})(z^0 + z^{12} + \ldots + z^{96})$$

$$= 1 + \ldots + 2 \cdot z^{100} + \ldots$$

$\Rightarrow$ Es gibt 2 Lösungen

Matrixstruktur

Gesucht: Lösungen mit positiven x und y

$$ax + by = k$$

Schreibe mögliche Werte für ax in eine Spalte und mögliche Werte für by in eine Zeile.

$$ax \in \left\{0, a, \ldots, a\left\lfloor \frac{k}{a} \right\rfloor\right\} \quad by \in \left\{0, b, \ldots, b\left\lfloor \frac{k}{b} \right\rfloor\right\}$$

Bilde Matrix Z mit $z_{ij} = ax_i + by_j$

Suche $z_{ij} = k$ → x_i, y_j ist die gesuchte Lösung

Matrixstruktur

	0	b	2b	3b	…
0	0	b	2b	3b	
a	a	a+b	a+2b	a+3b	
2a	2a	2a+b	2a+2b	2a+3b	
3a	3a	3a+b	3a+2b	3a+3b	
…					

Beispiel (Fortsetzung)

$$ax + by = k \Leftrightarrow 20x + 56y = 32$$

	0
0	0
20	20

Beispiel (Brief frankieren)

	0	12	24	36	48	60	72	84	96
0	0	12	24	36	48	60	72	84	96
5	5	17	29	41	53	65	77	89	101
10	10	22	34	46	58	70	82	94	106
15	15	27	39	51	63	75	87	99	111
20	20	32	44	56	68	80	92	104	116
25	25	37	49	61	73	85	97	109	121
30	30	42	54	66	78	90	102	114	126
35	35	47	59	71	83	95	107	119	131
40	40	52	64	76	88	**100**	112	124	136
45	45	57	69	81	93	105	117	129	141
50	50	62	74	86	98	110	122	134	146
55	55	67	79	91	103	115	127	139	151
60	60	72	84	96	108	120	132	144	156
65	65	77	89	101	113	125	137	149	161
70	70	82	94	106	118	130	142	154	166
75	75	87	99	111	123	135	147	159	171
80	80	92	104	116	128	140	152	164	176
85	85	97	109	121	133	145	157	169	181
90	90	102	114	126	138	150	162	174	186
95	95	107	119	131	143	155	167	179	191
100	**100**	112	124	136	148	160	172	184	196

Übungsaufgabe

Der jährliche Mitgliedsbeitrag eines Vereins beträgt 23 Euro bis 60 Jahre und 17 Euro für über 60 Jährige. Der gesamte Mitgliedsbeitrag betrug im letzten Jahr genau 126 Euro.

Bestimme die Anzahl der über 60 Jährigen mit Hilfe der Matrixstruktur.

Lösung (1)

$$23x + 17y = 126$$

	0	17	34	51	68	85	102	119
0	0	17	34	51	68	85	102	119
23	23	40	57	74	91	108	125	142
46	46	63	80	97	114	131	148	165
69	69	86	103	120	137	154	171	188
92	92	109	**126**	143	160	177	194	211
115	115	132	149	166	183	200	217	234

Lösung(2)

$$126 = 92 + 34 = 4 \cdot 23 + 2 \cdot 17$$

2 Mitglieder sind über 60 Jahre alt.