Diskrete Mathematik

Hamiltonsche Graphen
Teil I

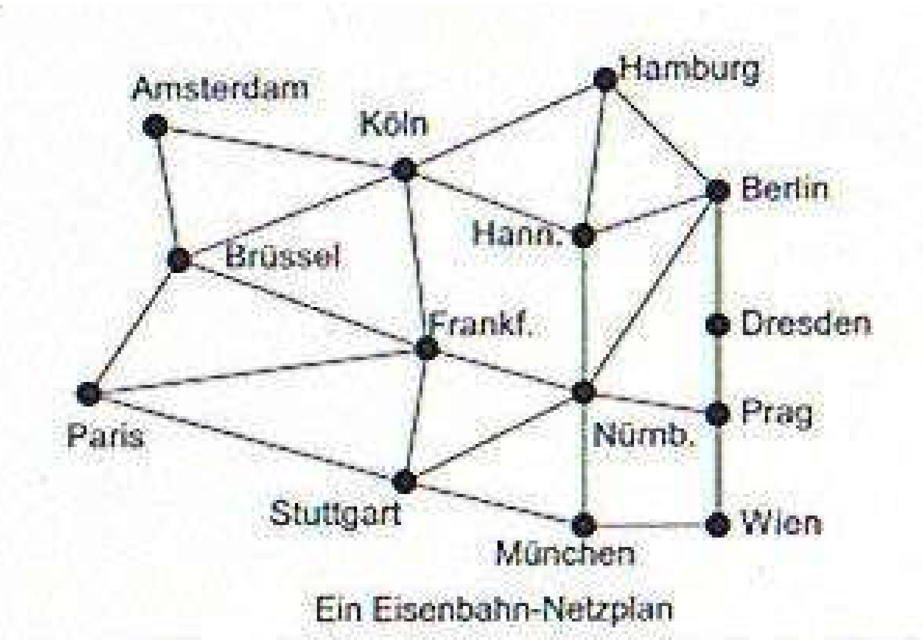
Karina Arndt

21.06.2006

Übersicht

- Einleitung
- Hamiltonsch und eulersch
- Hamiltonsche Kreise
- Hamiltonsche Graphen neu zeichnen
- Kreise und Wege
- Reguläre Graphen

Einleitung

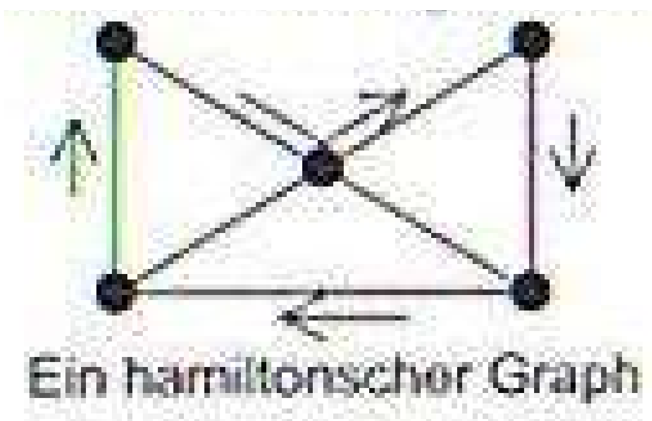


- Rundfahrt
- **Start:** Berlin
- Jede Stadt muss **genau einmal** besucht werden
- **Aber:** nicht jede Strecke abgefahren
- Netzplan ist Graph
- **Lösung:** Ideen der Graphentheorie
- **Gesucht:** geschlossener Kantenzug, der jede Ecke des Graphen genau einmal enthält

Definition (Hamiltonscher Kreis) Ein geschlossener Kantenzug, der jede Ecke des Graphen genau einmal enthält, heißt hamiltonscher Kreis. Er geht durch jede Ecke, braucht aber nicht durch jede Kante zu führen.

Definition (Hamiltonscher Graph) Ein Graph, der einen hamiltonschen Kreis enthält, heißt hamiltonscher Graph.

- Beispiel und Gegenbeispiel



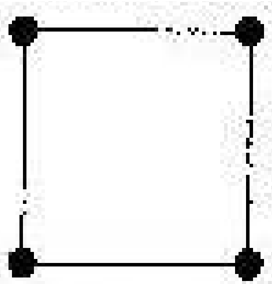
Hamiltonsch und eulersch

Definition (Eulerscher Graph) Gibt es einen geschlossenen Kantenzug, der jede Kante genau einmal enthält, so heißt der Graph eulersch.

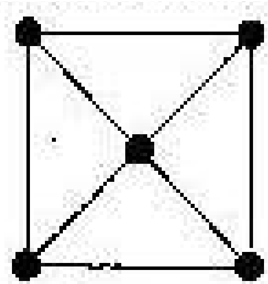
- **Eulersch:** Jede *Kante* muss genau einmal durchlaufen werden
- **Hamiltonsch:** Jede *Ecke* muss genau einmal durchlaufen werden

- Graphen können beide, eine oder keine der Eigenschaften besitzen

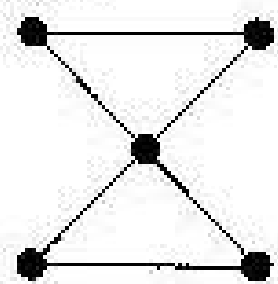
- Einige Beispiele dazu



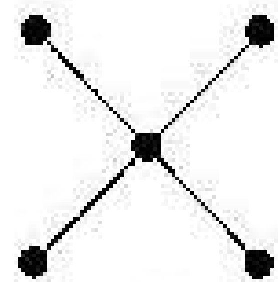
Eulersch und hamiltonsch



Hamiltonsch, aber nicht eulersch



Eulersch, aber nicht hamiltonsch



Nicht hamiltonsch und nicht eulersch

Hamiltonsche Kreise finden

- Vorgehensweise
  - Wenn eine Ecke passiert wurde, werden die nicht benutzten Kanten gestrichen
  - Es dürfen keine Ecken entstehen, die nie mehr erreicht werden können (Ecken vom Grad 1)
  - Es dürfen keine Teilgraphen abgespalten werden, die mit dem übrigen Graphen nicht zusammenhängen

- Keine konstruktiven Regeln, da gesagt wird, was man **nicht** machen darf

- Es gibt **keinen** einfachen Algorithmus, mit dem man entscheiden kann, ob ein Graph hamiltonsch ist und auch keinen zum Auffinden eines hamiltonschen Kreises

- Für jeden einzelnen Graphen kann man entscheiden, ob er hamiltonsch ist, und wenn ja, einen hamiltonschen Kreis durch *intelligentes Probieren* finden.

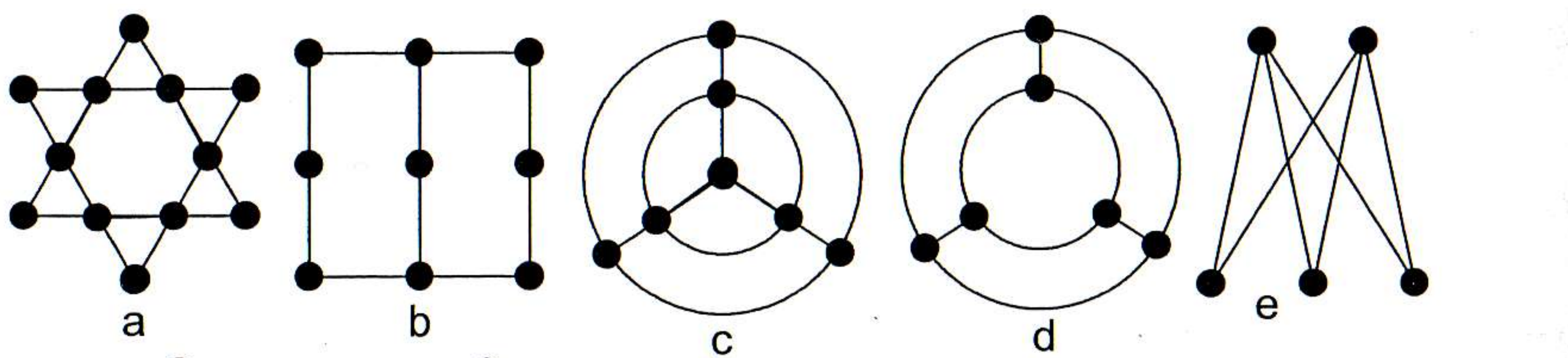
- Mit steigender Eckenzahl wird die Lösung des Problems schwieriger

- **Teilergebnis nach Dirac:** Wenn ein Graph n Ecken und jede Ecke mindestens den Grad $n/2$ hat, dann ist er hamiltonsch.

- **Prinzip** dieses und anderer Sätze: Hat der Graph genügend viele Kanten, so ist er hamiltonsch

Übungsaufgabe

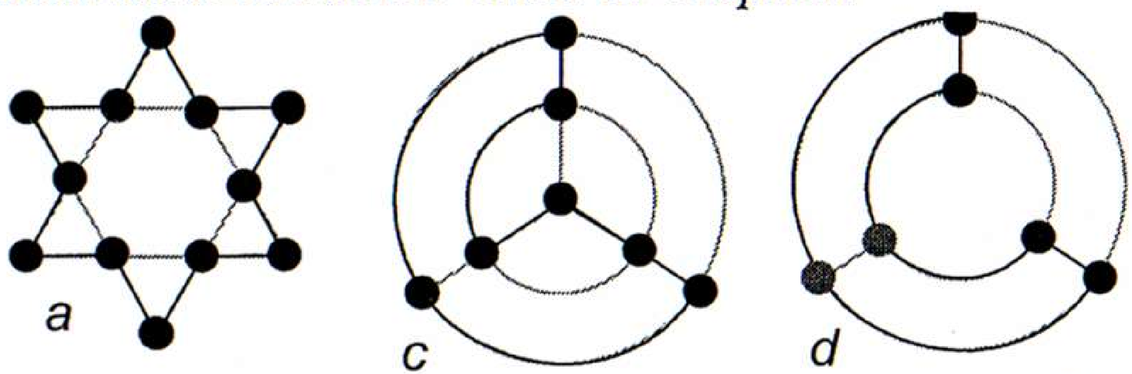
- Von den folgenden Graphen sind zwei nicht hamiltonsch. Welche sind das?
- Zeichnen Sie bei den anderen einen der möglichen hamiltonschen Kreise ein.



Lösung

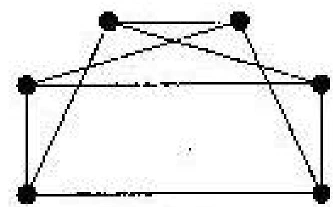
- b und e sind nicht hamiltonsch

Hamiltonsche Kreise der anderen Graphen:

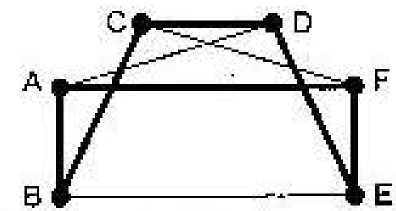


Hamiltonsche Graphen zeichnen

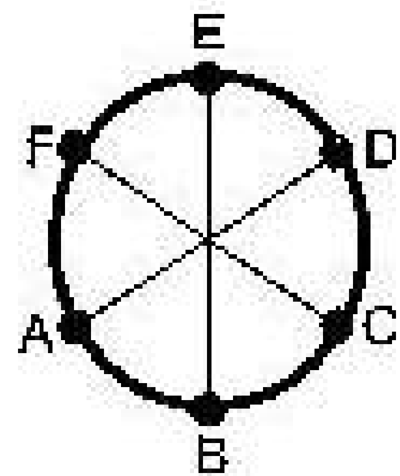
- Ecken liegen sämtlich auf einem hamiltonschen Kreis, den man als eine richtige Kreislinie zeichnen kann
- Anordnung der Ecken in der richtigen Reihenfolge auf einer Kreislinie
- Es entsteht ein zu dem Graphen isomorpher Graph
- Zwei Graphen G1, G2 sind **isomorph**, wenn es eine umkehrbar eindeutige Abbildung von G1 nach G2 gibt



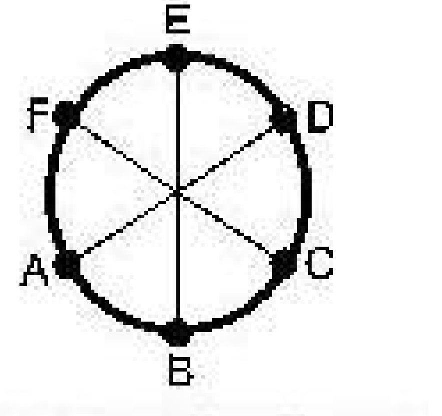
Ein Graph

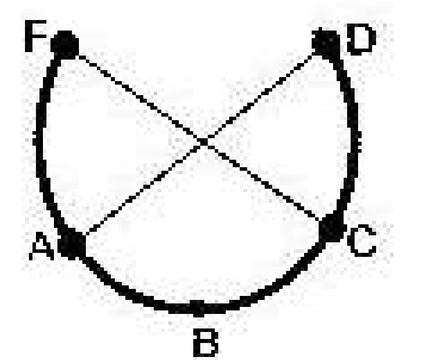


Ein hamiltonscher Kreis dieses Graphen



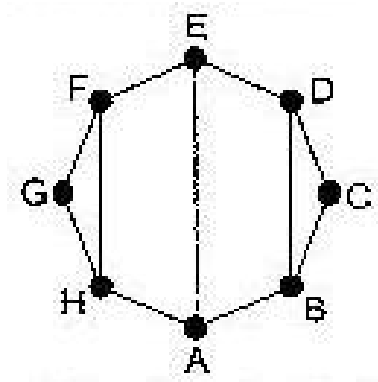
- Der Graph ist **nicht** hamiltonsch
  - Entferne eine Ecke und alle in ihr endenden Kanten
  - Graph zerfällt in zwei oder mehr Teile
  - Teile hängen *nicht* miteinander zusammen





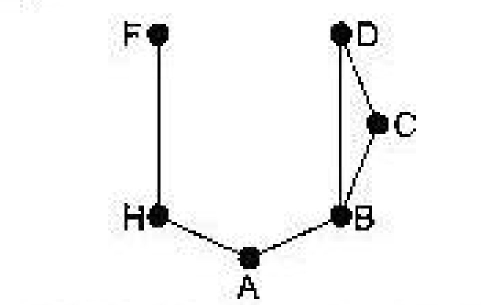
Die Ecke E wurde entfernt.

- Graph bleibt zusammenhängend, wenn man 2 nebeneinander liegende Ecken entfernt



Ein hamiltonscher Graph

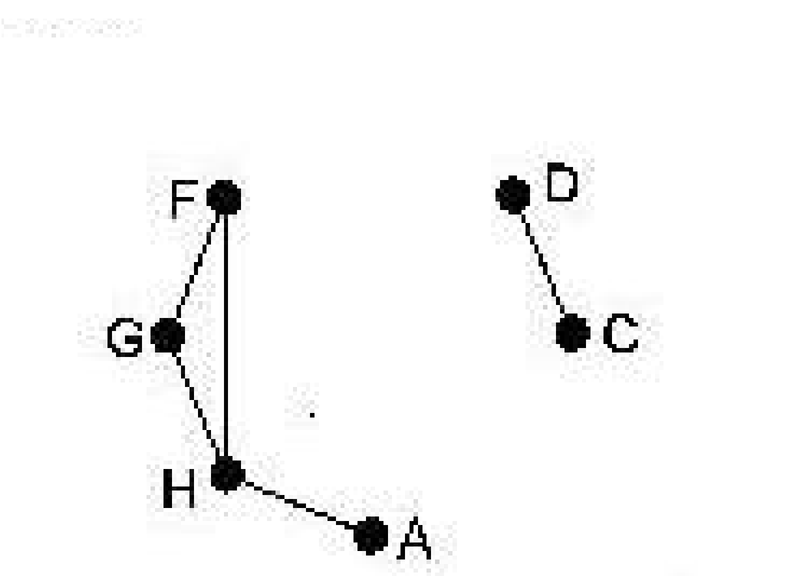
- Bleibt hier aber auch zusammenhängend, wenn man nicht nebeneinander liegende Ecken entfernt



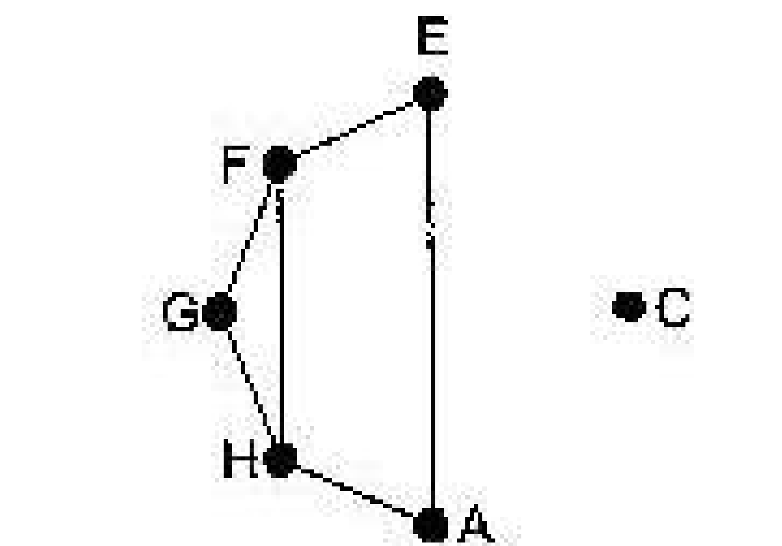
Die Ecken E und G wurden entfernt.

- In anderen Fällen kann der Kreis aber durch Entfernen zweier Ecken und deren Kanten in zwei Teile zerfallen, wobei ein Teil auch eine isolierte Ecke sein kann

- Wie man sieht, ist es aber nicht möglich durch Entfernen zweier Ecken und deren Kanten 3 Teile zu erhalten



Die Ecken B und E wurden entfernt.



Die Ecken B und D wurden entfernt.

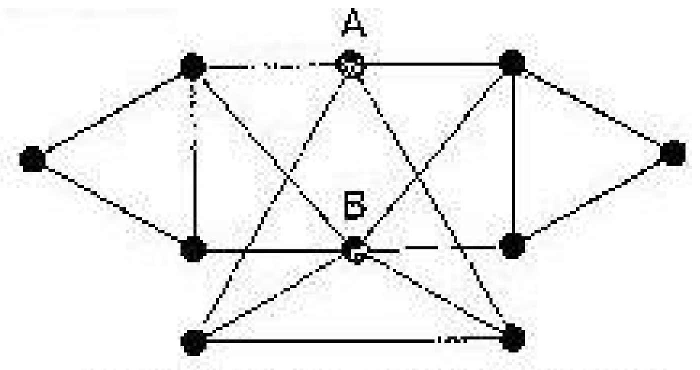
- ***Satz*** Entfernt man aus einem hamiltonschen Graphen ***n*** Ecken und mit ihnen alle Kanten, die in diesen Ecken enden, so zerfällt er in „höchstens“ ***n*** zusammenhängende Teilgraphen

- Dieser Satz gibt nur eine Eigenschaft von hamiltonschen Graphen an

- ***Höchstens****:* zwischen den übrig gebliebenen Ecken bestehen möglicherweise Querverbindungen, die nicht Teil des hamiltonschen Kreises sind

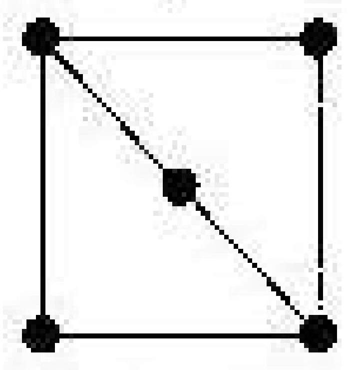
- Auf keinen Fall können ***n+1*** oder mehr Teilgraphen entstehen, wenn der Graph hamiltonsch ist

- **Beispiel:** Löscht man in dem folgenden Graphen 2 Ecken (A und B), so bleiben 3 Teilgraphen übrig, die nicht zusammenhängen



Ein Graph, der nicht hamiltonsch ist

- **Schlechtes Beispiel:** Löscht man hier eine beliebige Ecke, so bleibt der Rest zusammenhängend. Hamiltonsch ist der Graph aber trotzdem nicht!

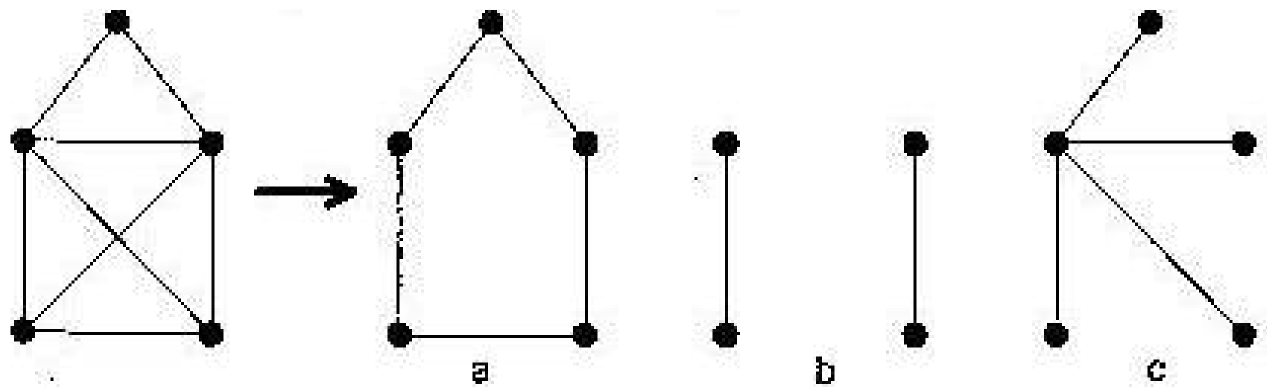

Nicht hamiltonsch!

- Man kann den Satz benutzen um zu begründen, dass man in einem Graphen keinen hamiltonschen Kreis finden kann, aber nicht umgekehrt

- ***Definition (Teilgraph)*** Ein Graph H heißt Teilgraph eines Graphen G, wenn alle Ecken von H auch Ecken von G und alle Kanten von H auch Kanten von G sind.

- Teilgraphen entstehen also dadurch, dass man aus dem gegebenen Graphen Kanten entfernt oder Ecken und zugleich alle Kanten, die in diesen Ecken enden.

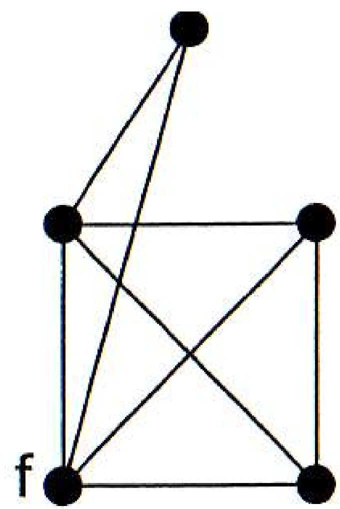
- Beispiel (Nikolaus Haus)

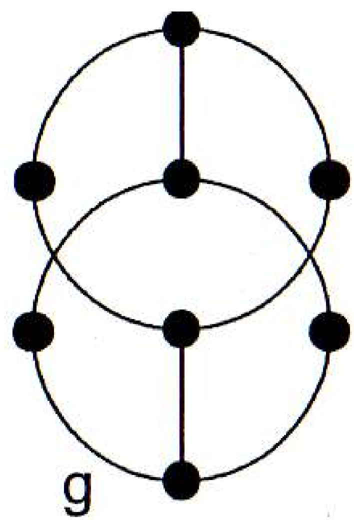


Ein Graph und drei seiner Teilgraphen

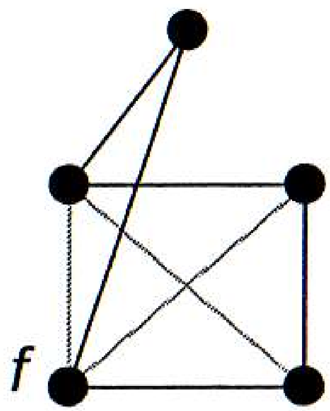
Übung

- Zeige durch Ecken löschen, ob der Graph hamiltonsch sein kann.

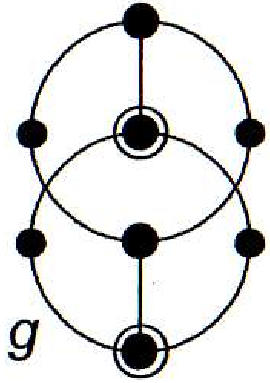




Lösung



- Kann hamiltonsch sein, egal welche Ecke man löscht, es bleibt ein zusammenhängender Graph

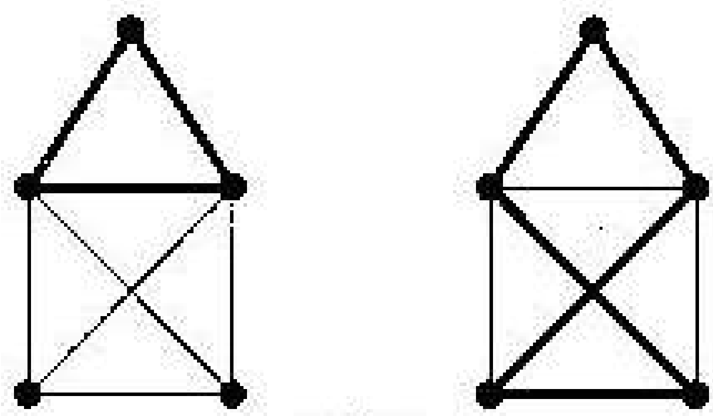


- Nicht hamiltonsch. Es entstehen 3 nicht zusammenhängende Graphen

Kreise und Wege

- ***Definition (Kreis)*** In einem Graphen heißt ein geschlossener Kantenzug, der jede seiner Ecken höchstens einmal enthält, Kreis.

- Ein Kreis ist ein geschlossener Kantenzug, der sich in Ecken nicht selbst überkreuzt
- In diesem Sinne sind auch Dreiecke und Vierecke Kreise

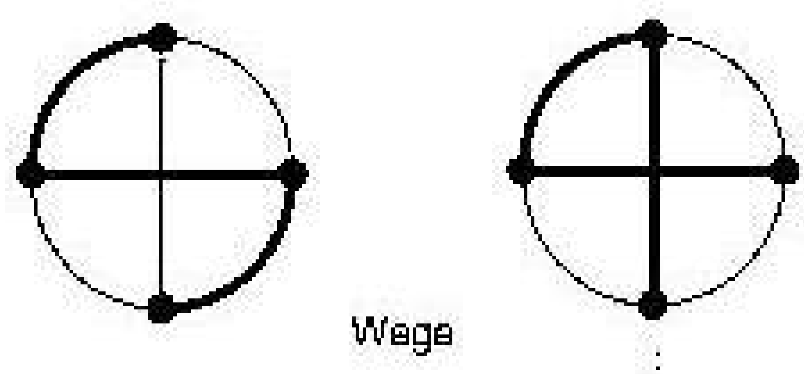


Kreise

- Lässt man die Forderung ***geschlossen*** fallen, so erhält man den Weg

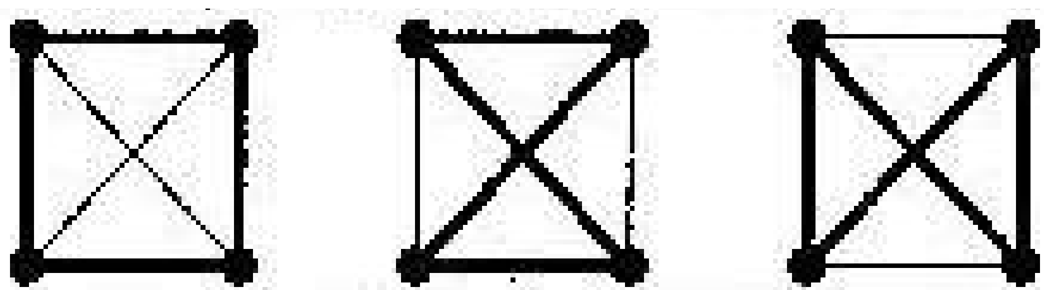
- ***Definition (Weg)*** Ein Weg ist ein Kantenzug, der jede seiner Ecken höchstens einmal enthält

- Somit ist ein Kreis ein geschlossener Weg



Wie viele hamiltonsche Kreise gibt es?

- Ein vollständiges Vieleck enthält außer den Seiten sämtliche Diagonalen
- Vollständige Vielecke sind ausnahmslos hamiltonsch
- Bei einem Dreieck gibt es nur einen hamiltonschen Kreis: Das Dreieck selbst
- Bei einem Viereck gibt es schon 3 hamiltonsche Kreise



Die hamiltonschen Kreise eines vollständigen Vierecks

- Bei einem vollständigen Vieleck mit ***n*** Ecken, setzt man den Stift an einer beliebigen Ecke an (fester Startpunkt)

- Für den Anfang des hamiltonschen Kreises hat man ***n-1*** Kanten zur Auswahl

- Von dort aus kann man zu ***n-2*** weiteren Ecken gelangen, in denen man noch nicht war

- Es gibt also ***(n-1)*(n-2)*** Möglichkeiten die ersten beiden Kanten zu zeichnen

- Die Anzahl der hamiltonschen Kreise, die man auf diese Weise erhält ist ***(n-1)!***

- Allerdings sind hierbei alle Kreise doppelt gezählt, da die Kante auf der man zur Anfangsecke zurückkehrt, zugleich die erste eines anderen Kreises ist, der in der Gegenrichtung durchlaufen wird

- ***Satz*** Die Anzahl der hamiltonschen Kreise eines vollständigen ***n***-Ecks ist ***(n-1)!/2***

- **Satz** Die Anzahl der hamiltonschen Kreise eines einfachen Graphen mit ***n*** Ecken ist höchstens ***(n-1)!/2***

Reguläre Graphen

- ***Definition (Regulär)*** Graphen, in denen alle Ecken den gleichen Grad haben, heißen regulär.
- ***Definition (Regulär vom Grad g)*** Graphen in denen alle Ecken den Grad g haben, heißen regulär vom Grad g.
- Anschaulich ist der Grad einer Ecke, die Anzahl der Kanten, die in ihr enden
- Vollständige Vielecke sind reguläre Graphen
- Das vollständige ***n***-Eck ist regulär vom Grad ***n-1***