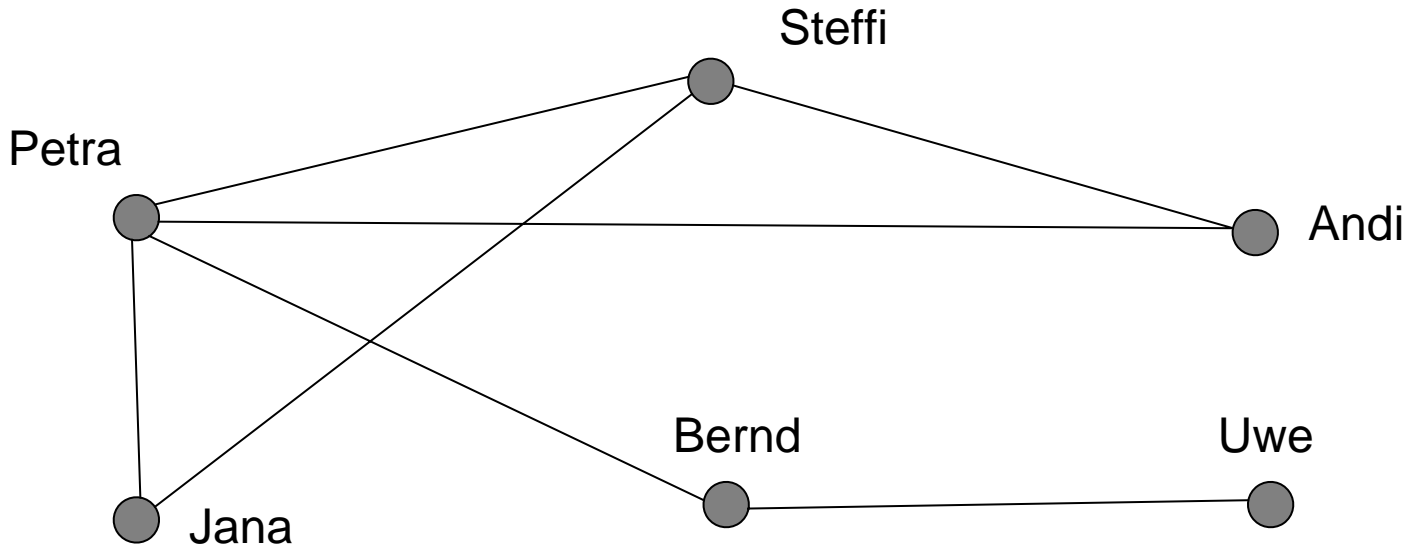


Eigenschaften über die Grade von Ecken

Bsp: Tennisturnier



Einschränkungen / Regeln

- Keiner spielt gegen sich selbst
 - *Keine Schlingen an Ecken*
- Jeder spielt genau einmal gegen jeden anderen
 - *Keine parallelen Kanten*

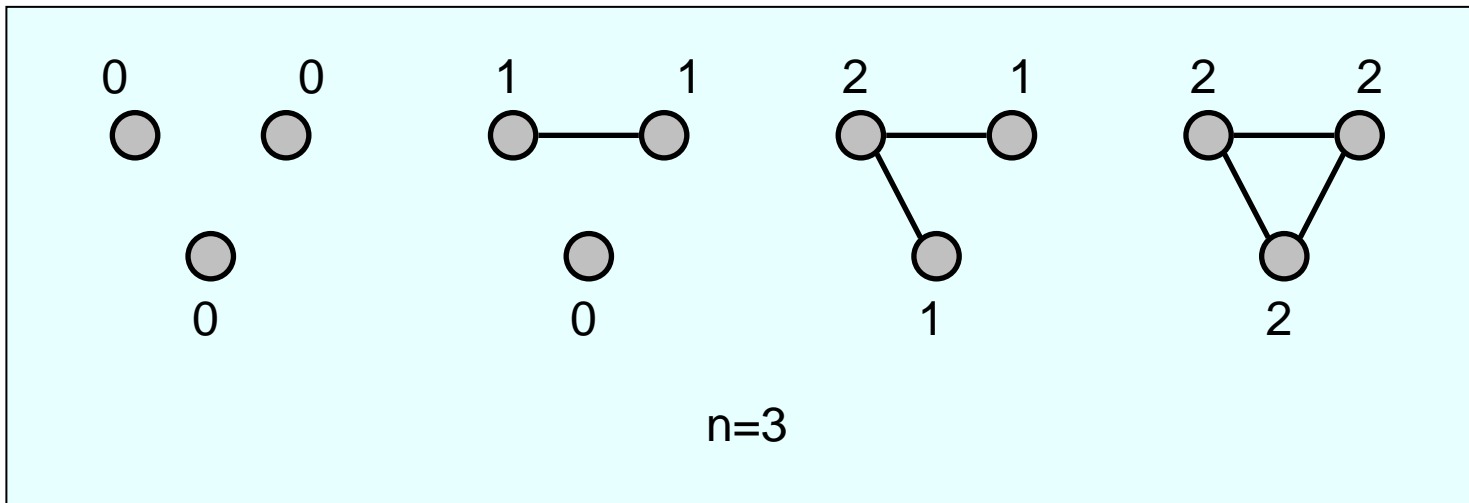
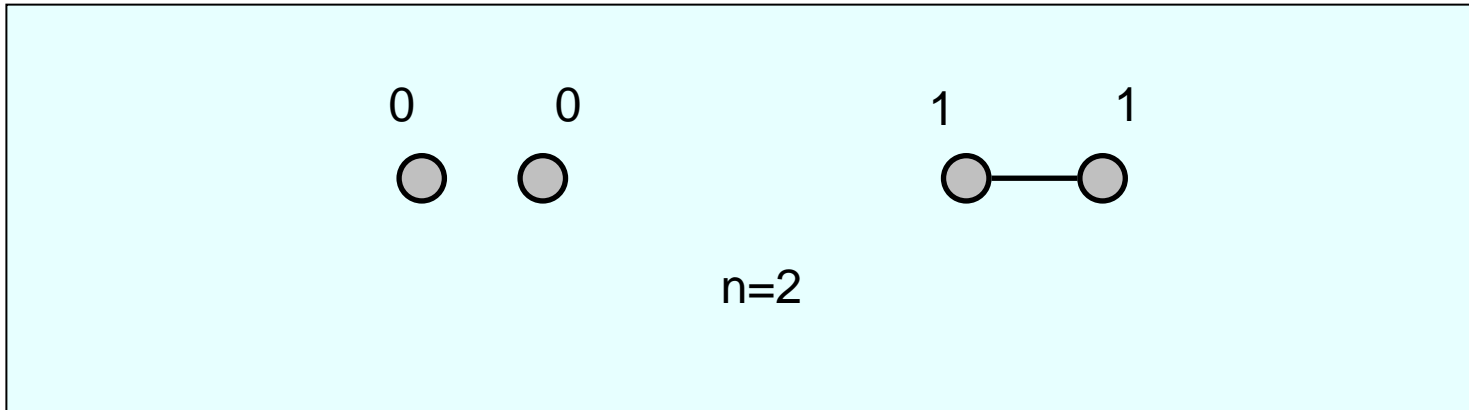
Anzahl der Spiele == Grad der jeweiligen Ecke

Bernd	2
Steffi	3
Uwe	1
Petra	4
Jana	2
Andi	2

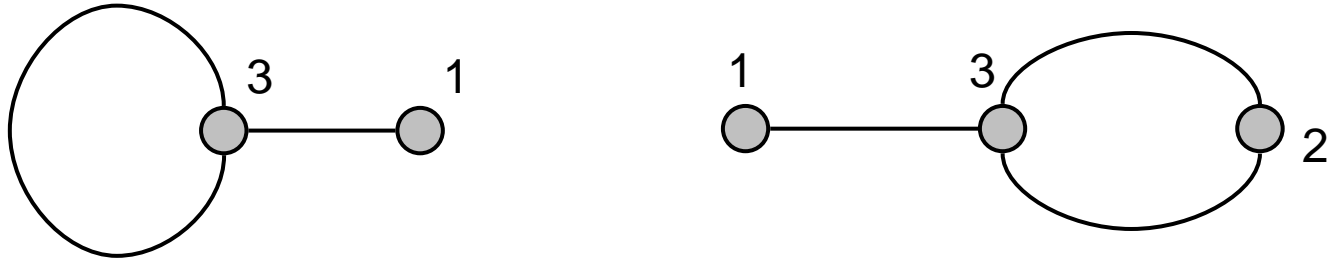
Es fällt auf das in unserem Graphen Ecken existieren die den gleichen Grad haben.

Ist dies bei jedem Turnier/Graphen so?

Möglichkeiten bei Turnieren mit n Spielern



Ist dies eine Eigenschaft aller Graphen?



Wie wir sehen ist diese Eigenschaft nicht allgemeingültig für Graphen

Aber: Diese Graphen haben Schlingen und parallele Kanten welche aufgrund unserer Voraussetzungen nicht vorkommen können.

Satz: In jedem **einfachen** Graphen gibt es mindestens zwei Ecken die den gleichen Grad haben.

$$\exists i, j \in N : \text{grad}(e_i) = \text{grad}(e_j)$$

Beweis :

Vorraussetzung: Es existieren keine Schlingen und parallele Kanten

Sei n die Anzahl der Ecken in dem Graphen, dann folgt nach Vorraussetzung das der höchstmögliche Eckengrad $n-1$ ist.

1.Fall : Es existiert eine Ecke mit Grad $n-1$

=>alle verbleibenden Ecken sind mit dieser Ecke verbunden

=>es existieren keine isolierten Ecken $\forall i \in N : \text{grad}(e_i) \neq 0$

=>es bleiben nur die Zahlen $1, 2, 3, \dots, n-1$ als mögliche Grade der Ecken

=>mindestens ein Grad kommt doppelt vor

2.Fall: Es existiert keine Ecke mit Grad $n-1$

=> höchstmöglicher Grad ist $n-2$

=>es bleiben nur die Zahlen $0, 1, 2, \dots, n-2$ als mögliche Grade der Ecken

=>mindestens ein Grad kommt doppelt vor

Das Handshaking-Lemma

Satz: Die Summe der Eckengrade ist in jedem Graphen eine gerade Zahl

$$\left(\sum_{i \in N} \text{grad}(e_i) \right) \bmod 2 = 0$$

Beweis: Hat ein Graph n Kanten so ist die Anzahl der Enden dieser n Kanten zusammen $2n$. Dies ist zugleich die Summe der Grade aller Ecken. Hierbei spielt es im übrigen keine Rolle, ob die Kanten Schlingen sind oder ob sie zu anderen Kanten parallel sind.

Satz: In jedem Graphen ist die Summe aller Eckengrade doppelt so groß wie die Anzahl der Kanten.

Ecken mit ungeradem Grad

Satz: In jedem Graphen ist Anzahl der Ecken mit ungeradem Grad eine gerade Zahl.

Beweis :

Annahme: Es existiert eine ungerade Anzahl Ecken m mit ungeradem Grad und eine beliebige Anzahl Ecken n mit geradem Grad.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n+m} \text{grad}(e_i) = \sum_{i:\text{grad}(e_i)\text{ gerade}} \text{grad}(e_i) + \sum_{i:\text{grad}(e_i)\text{ ungerade}} \text{grad}(e_i)$$

\Rightarrow Die Summe aller Eckengrade in unserem Graphen ist ungerade.

\Rightarrow Widerspruch !

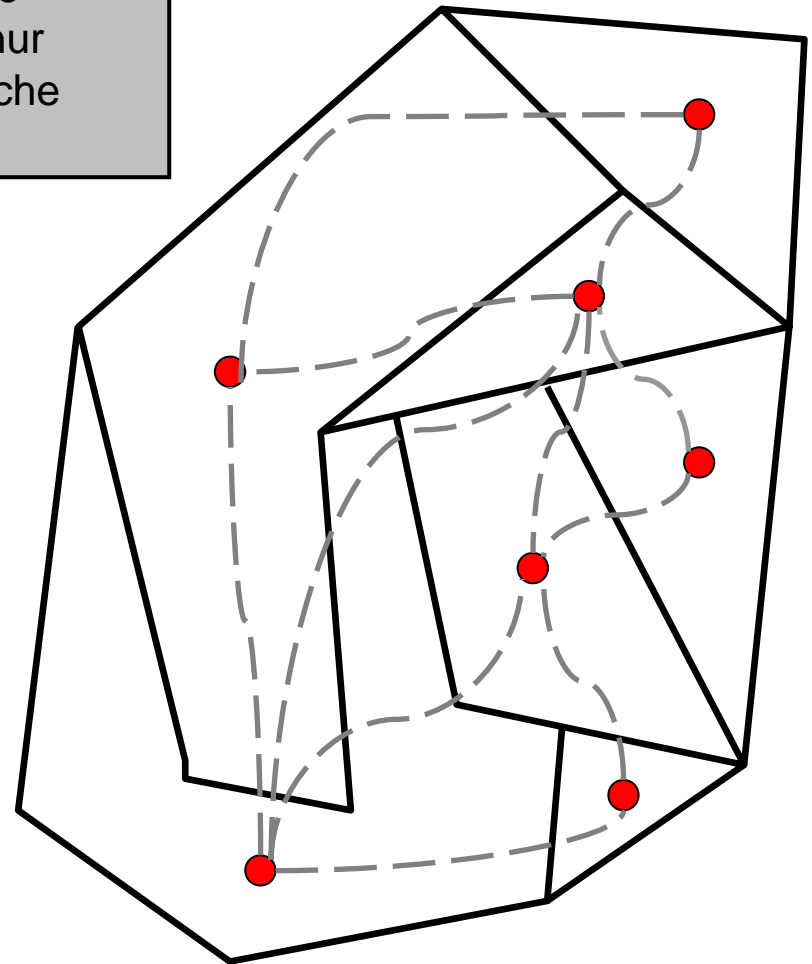
Färbungsprobleme

Ist es möglich mit einer bestimmten Anzahl von Farben die Regionen einer Karte so einzufärben das alle Gebiete mit einer gemeinsamen Grenze (nicht nur einem gemeinsamen Grenzpunkt) unterschiedliche Farben besitzen?

Zur Lösung konstruiert man sich einen Dualgraphen G einer gegebenen Karte M .

Der so konstruierte Graph G ist ein ebener Graph, und das Färben der Ecken ist im üblichen Sinne dasselbe wie das Färben der Gebiete von M .

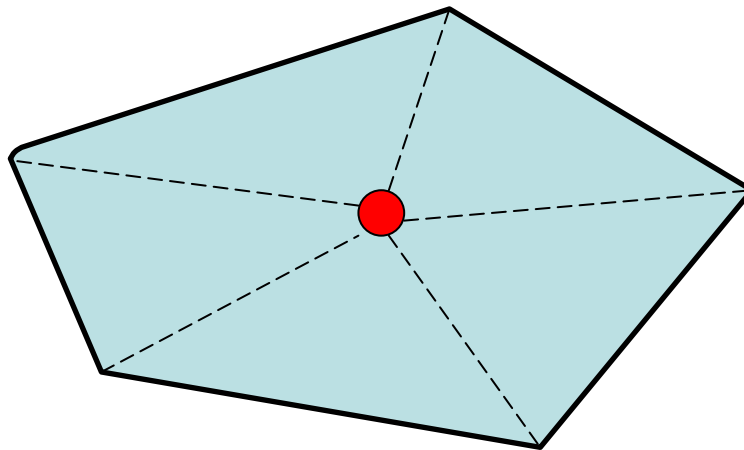
Man kann ohne weiteres annehmen das Der Graph G keine Schlingen und parallelen Kanten besitzt.



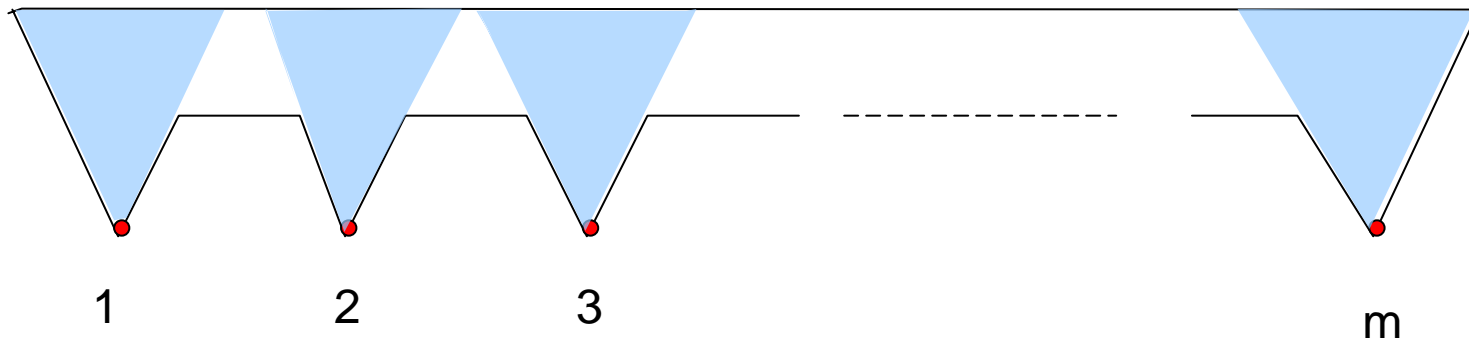
Museumswächterproblem

Der Manager eines Museums will sichergehen dass jeder Punkt seines Museums im Blickfeld eines Aufsehers liegt. Die Wächter werden an festen Stellen positioniert, aber sie dürfen sich drehen. Wie viele Wächter braucht man dann (maximal) um die gesamte Grundfläche zu beobachten?

Trivialer Fall: Die Ausstellungshalle ist konvex. 1 Wächter reicht aus.



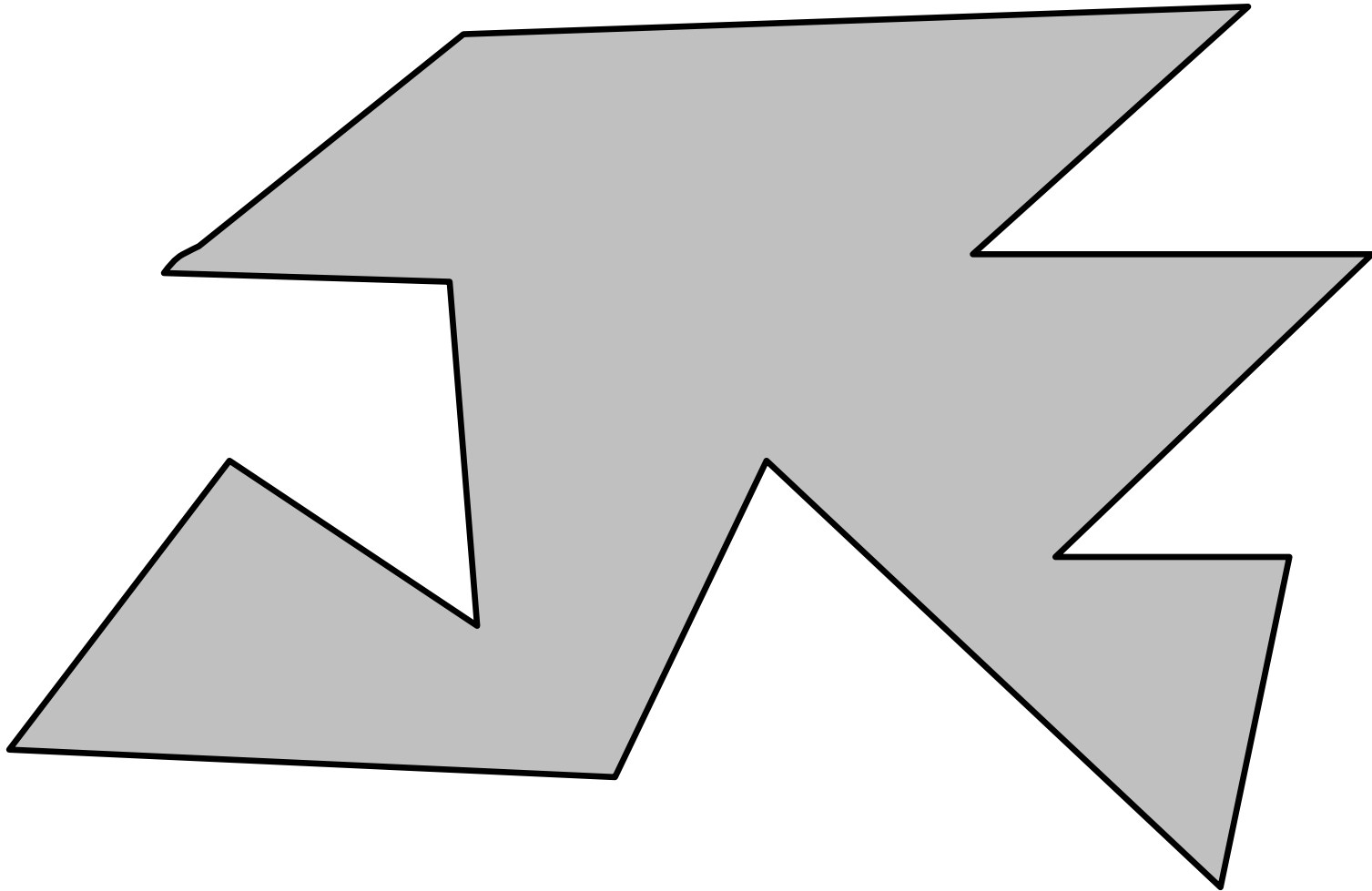
Wir betrachten nun ein Museum mit $n=3m$ Wänden, dessen Grundriss ein „Kamm“ ist. Dann ist leicht zu sehen, dass man $m = \frac{n}{3}$ Wächter braucht.



Der Punkt 1 im Grundriss kann nur von einem Wächter beobachtet werden, der irgendwo in dem schattierten Dreieck steht, das die 1 enthält. Genau das Gleiche gilt für die Punkte 2,3,...,m. Weil diese Dreiecke alle disjunkt sind, sehen wir, dass man mindestens m Wächter braucht. Aber m Wächter reichen auch aus wenn man sie an die obere Kante der Dreiecke stellt.

Satz: Für jedes Museum mit n Wänden reichen $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Wächter aus.

Allgemeiner Fall: Gegeben sei als Grundfläche ein beliebiger, geschlossener Polygonzug.

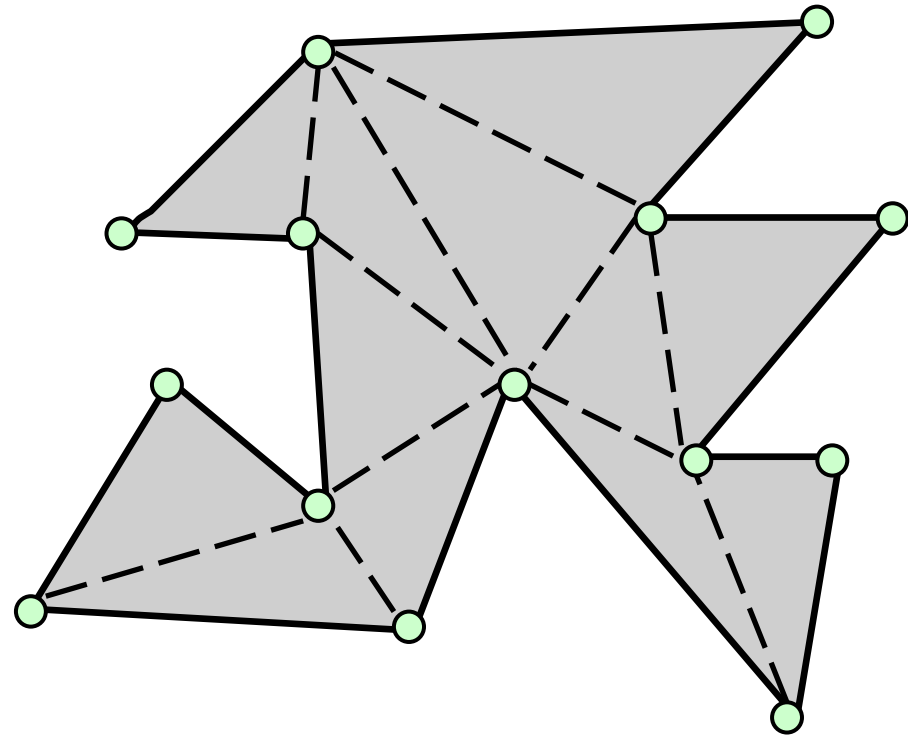


Beweis:

1. Triangulieren des Polygonzuges bis der Innenraum in Dreiecke aufgeteilt ist. Es ist hierbei egal welche Triangulierung gewählt wird.

Behauptung: Dieser Graph ist 3-färbbar

Für $n=3$ ist nichts zu beweisen. Für $n>3$ wählen wir zwei beliebige Ecken u und v , die durch eine Diagonale verbunden sind. Diese Diagonale zerlegt den Graphen in zwei kleinere triangulierte Graphen, die beide die Kante uv enthalten. Nach Induktion können wir jede Hälfte mit drei Farben färben, wobei wir annehmen dürfen, dass in beiden Färbungen die Ecke u die Farbe 1 und die Ecke v die Farbe 2 erhält. Durch „Zusammenkleben“ der Einzelteile erhalten wir eine 3-Färbung des gesamten Graphen.



Färbung des Graphen

Eigenschaften:

1. Steht ein Wächter an einer Ecke eines Dreieckes so kann er das ganze Dreieck beobachten

2. Die drei Ecken eines Dreieckes Enthalten jeweils alle Farben. Jedes Dreieck hat somit eine Ecke der Farbe c .

Wählen wir also nun die Ecken mit der Farbe c die die geringste Mächtigkeit in unserem Graphen hat und postieren dort unsere Wächter so ist der gesamte Ausstellungsraum bewacht. Es existiert in jedem Fall eine Farbe die nur an $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Ecken benutzt wird.

In unserem Fall, mit $|E(c_1)| = 6$, $|E(c_2)| = 3$, $|E(c_3)| = 5$ würden wir die Wächter auf Ecken der Farbe 2 Platz platzieren.

