Hamiltonsche Graphen (2. Teil)

Themen des Vortrages

- Für Schachspieler
- Hamiltons Spiel
- Sitzordnungen
- Eine billige Rundreise
- Ein vielleicht unlösbares Problem
- Bäcker mit Kenntnissen in Graphentheorie
- Fazit

Für Schachspieler

Für Schachspieler

- <u>Problematik für die Figur **TURM**:</u>
  - Turm nur geradeaus und quer, nicht diagonal
  - Frage 1:

    Kann Turm über alle Felder eines Schachbrettes genau einmal ziehen und am Ausgangspunkt wieder auskommen?
  - Frage 2:

    Hat das irgendwie was mit Graphen zu tun?
  - <u>Aufgabe:</u>

    Überlegung für ein 4x4 Schachbrett

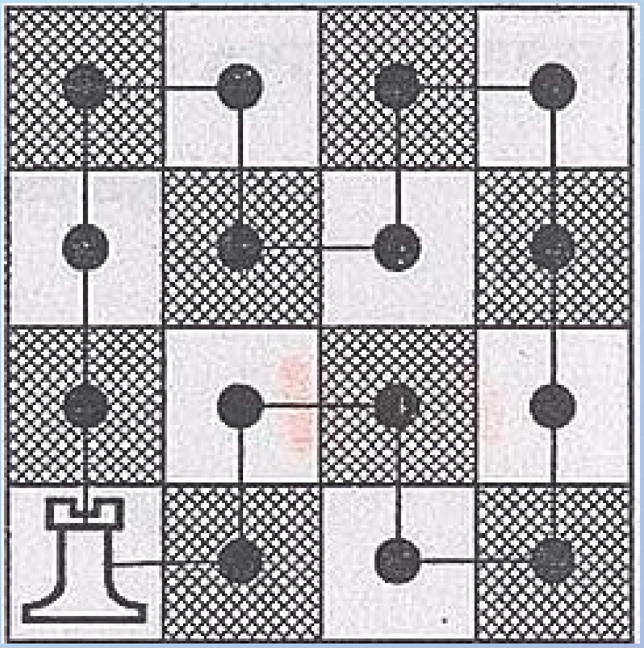
Für Schachspieler

- <u>Lösungsansatz:</u>
  - Definieren Felder als Ecken und Zugmöglichkeiten als Kanten
  - Zusätzliche Restriktion:
    - Turm darf nur 1 Feld ziehen

➔ erhalten gleiche Aufgabe wie einen hamiltonschen Kreis zu finden

➔ dieser existiert

Für Schachspieler



Turm zieht über jedes Feld genau einmal

Für Schachspieler

- Überlegung für ein 5x5 Schachbrett:
  - jedes Feld 1 mal besuchen und wieder zurück zum Start
    - ➔ 25 mal ziehen
  - Aber: je Schritt ein Farbwechsel des Feldes
    - ➔ Start auf schwarz, dann jedes ungerade Feld weiß, auch das 25.
    - ➔ also unmöglich zu lösen

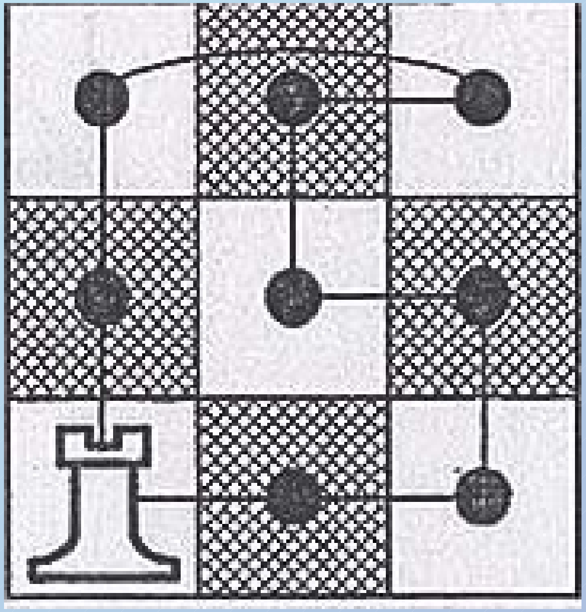
Für Schachspieler

- <u>Allgemein:</u>

  - Soll ein Turm auf einem (n x n)-Schachbrett über alle Felder genau einmal ziehen und zum Ausgangspunkt zurückkehren, so ist dies nur möglich, falls n gerade ist

  - Sind aber auch größere Schritte erlaubt, so kann ein Turm durchaus auf einem Schachbrett mit ungerader Eckenzahl (nach Def.: Felderzahl) alle Felder besuchen und wieder zum Ausgangspunkt zurückkehren

Für Schachspieler



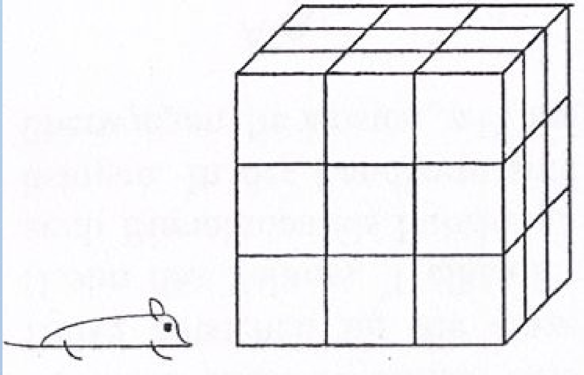
(Bsp. Für Schachbrett mit ungerader Eckenzahl)

➔ Hamiltonscher Kreis mit einem großen Schritt

Für Schachspieler

- <u>Aufgabe:</u>

  Käse der Form eines Würfels mit Maßen 3x3x3 soll von Maus links unten beginnend aufgefressen werden.

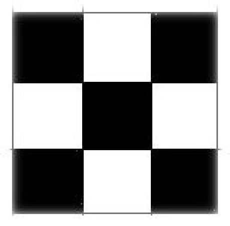


Die Maus und der Käse

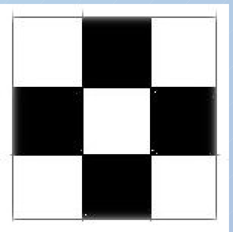
  - Kann sie sich durch alle kleinen Würfel der Maße 1x1x1 mit jeweils Einerschritten hindurch fressen und in der Mitte aufhören?
  - Kann sie es schaffen wenn sie an einer anderen Stelle anfängt zu fressen?

Für Schachspieler

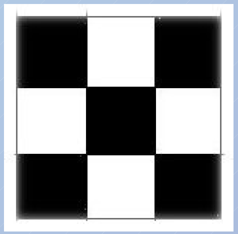
- <u>Lösung:</u>



1. Ebene



2. Ebene



3. Ebene

Nein, es ist unmöglich!

Man kann Würfelfelder wie ein dreidimensionales Schachbrett einfärben (siehe oben).

Startet Maus egal wo, z.B. auf „schwarz“ (1. Feld) so muss sie um zuletzt in die Mitte zu gelangen weitere 26 Felder durchqueren, wobei jedes ungerade wieder „schwarz“ ist.

Das heißt, die Mitte (27. Feld) kann unmöglich weiß sein, was aber nach Schachbrettfärbung sein müsste.

Für Schachspieler

- Problematik nun für die Figur **Pferd**:
  - nur Sprünge in L-Form möglich
  - Frage :

    Kann denn ein Pferd über alle Felder eines Schachbrettes genau einmal ziehen und am Ausgangspunkt wieder auskommen?

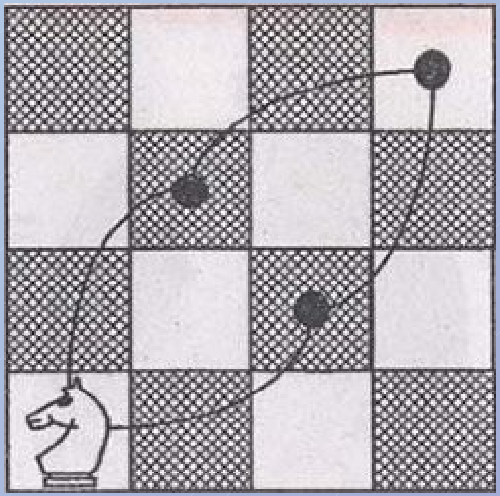
Für Schachspieler

- <u>Lösungsansatz:</u>
  - Auch Pferd wechselt bei jedem Zug die Farbe des Feldes
    - ➔ wenn Lösung existiert nur für Schachbretter mit gerader Anzahl von Feldern
  - <u>Aufgabe:</u>

    Überlegung für ein 4x4 Spielfeld ?

Für Schachspieler

- <u>Lösung:</u>
  - Auf 4x4 Spielfeld trotzdem nicht lösbar



  - Problem sind Ecken:
    - Nur von 2 bestimmten Feldern erreichbar
    - Von denen aus direkt auch zu beiden Ecken, sonst nie wieder
    - Es entsteht Kreis aus 4 Feldern, aus dem nie wieder raus

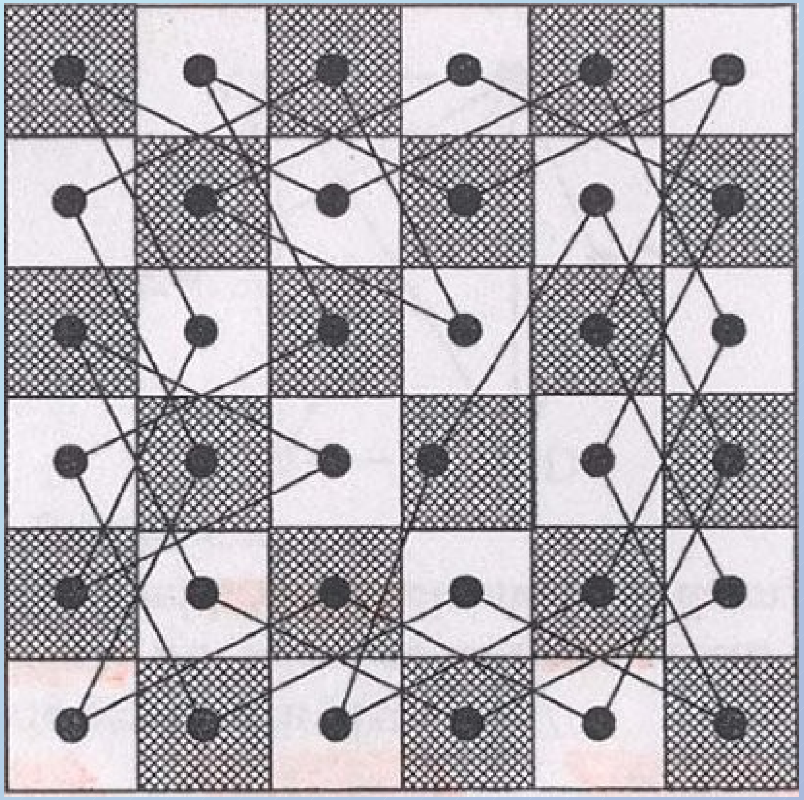
Für Schachspieler

- <u>Allgemein:</u>

  - Für 6 x 6 Schachbretter und größer mit gerader Eckenzahl kann das Pferd jedes Feld besuchen und wieder zum Ausgangspunkt zurückkehren.

  - Es ist jedoch sehr aufwändig eine Lösung für größere Schachbretter zu finden

Für Schachspieler

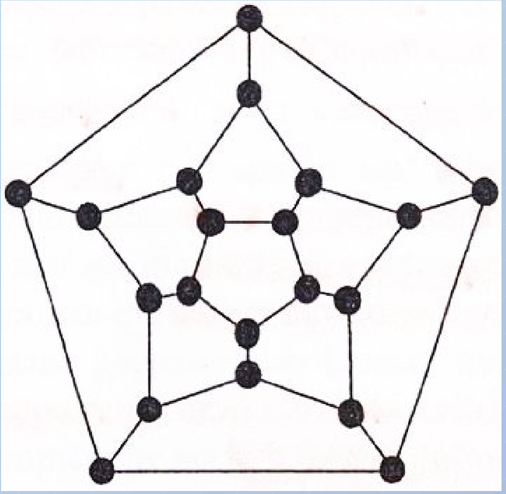


Lösung für ein 6 x 6 Schachbrett

<u>Hamiltons Spiel</u>

Hamiltons Spiel

- <u>Hamilton erfand ein Spiel für 2 Personen:</u>
  - „Reise um die Welt“



  - Jeder, der 20 Punkte stellt dabei eine Stadt dar
  - Außerdem gibt es 20 durchnummerierte Steine

Hamiltons Spiel

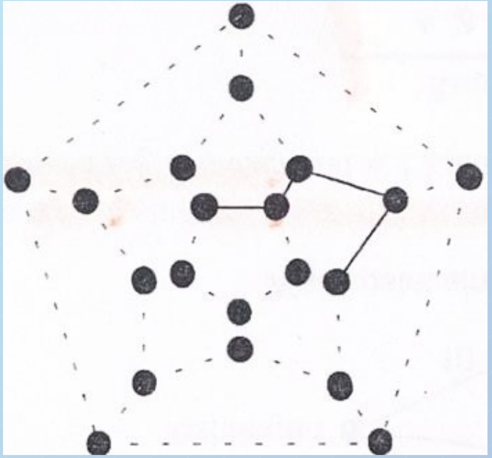
- <u>Spielablauf:</u>
  - Spieler 1 beginnt Reise und setzt Steine 1 bis 5 nacheinander so, dass zusammenhängende Kette entsteht
  - Spieler 2 setzt Reise fort und muss restliche 15 Steine so legen, dass insgesamt eine Rundreise entsteht

  - <u>Aufgabe:</u>

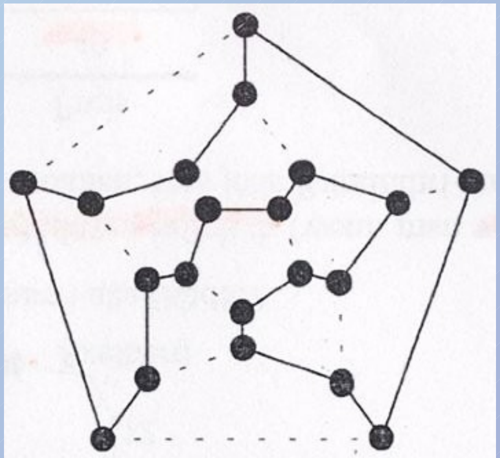
    Formuliert Aufgabe nach Kenntnissen über Graphen

Hamiltons Spiel

- <u>Lösung:</u>
  - Erster Spieler gibt Weg vor, der aus 4 Kanten besteht
  - Der 2. Spieler ergänzt ihn zum hamiltonschen Kreis



=>



Sitzordnungen

Sitzordnungen

- <u>Überlegung:</u>
  - Können 6 Personen an einem rundem Tisch so platziert werden, dass jeder zwischen 2 Personen sitzt, die er schon kennt?
  - Personen heißen A, B, C, D, E, F
  - In folgenden Gruppen kennt jeder die jeweils anderen:

    A, B, D, E   B, C, F   A, F   C, D

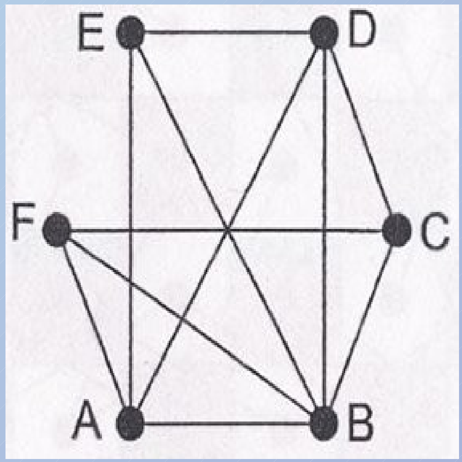
  - <u>Aufgabe:</u>

    1) Löst Aufgabe mit Hilfe der Graphentheorie

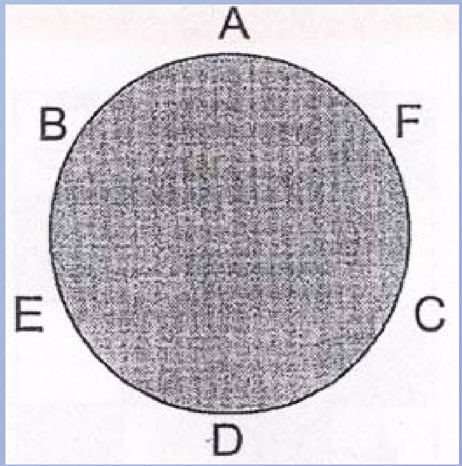
    2) Existiert ein hamiltonscher Kreis als Lösung?

Sitzordnungen

- Lösung:
  - Definiere Personen als Ecken und Kanten wenn sich 2 Personen kennen
  - Wir sehen: Graph ist hamiltonsch



  - Setzt man Leute nun entsprechend einem hamiltonschen Kreis
    ➔ Erhält man erwünschtes Ergebnis



Eine mögliche Lösung

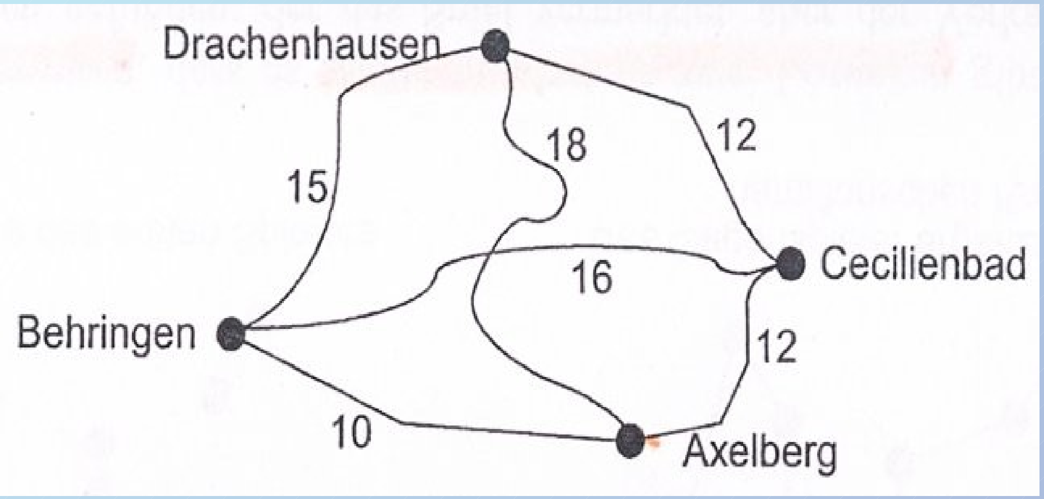
Eine billige Rundreise

Eine billige Rundreise

- <u>Überlegung:</u>
  - Wie im 1. Teil von Karina:
  - Reise durch alle Städte, jede aber nur einmal
  - Nun kein Pauschalpreis, sondern Fahrpreis ist streckenlängenabhängig
  - Planung der Rundreise nun durch knappe Kasse der Reiseteilnehmer erschwert
    - ➔ Reise soll so günstig wie möglich werden

Eine billige Rundreise

- <u>Welche ist die billigste Rundreise</u>



- 3 versch. Rundfahrtmöglichkeiten (richtungsunabh.)
- Kürzeste A-B-D-C-A mit Preis 49 GE
- Städte mit Verbindungen => wieder Graph,
  neu sind Zahlen an den Kanten
- Wir erhalten einen „Bewerteten Graphen“

<u>Ein vielleicht unlösbares Problem</u>

Ein vielleicht unlösbares Problem

- Geschäftsmann hat Kunden in mehreren Orten zu betreuen und danach in sein Büro zurückkehren
- Fahrtroute so planen, dass er jeden Ort an fährt und die zurückgelegte Strecke möglichst kurz ist
  - ➔ Traveling Salesman Problem
- Im vorherigen Bsp. Der billigen Rundreise ist das kein Problem, weil nur kleiner Graph

Ein vielleicht unlösbares Problem

- Wie wir im 1. Teil gesehen haben, ist die Anzahl der hamiltonschen Kreise eines vollständigen n-Ecks genau

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

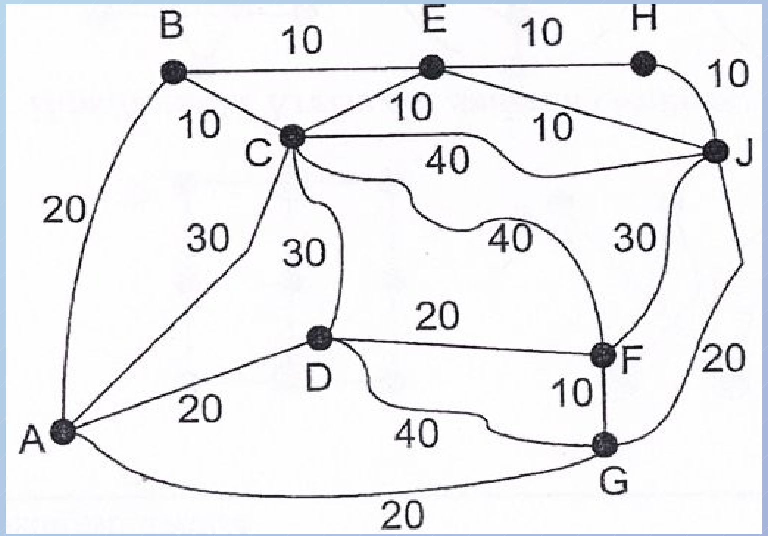
- Bei 6 Städten macht das schon 60 Möglichkeiten
- Bei 20 Städten sind es:

  1.216.451.004.088.320.000 Möglichkeiten

  ➔ Rechner mit 1 Mio. Rechnungen/sec würde 14 Milliarden Jahre an dieser Aufgabe rechnen

Ein vielleicht unlösbares Problem

- <u>Aufgabe:</u>



Ein Radfahrer will Rundfahrt
durch alle Orte der Karte machen,
wobei dir gesamte Fahrtzeit
möglichst kurz sein soll.
In der Karte sieht man als Wertung
des Graphen die jeweiligen Fahrtzeiten zwischen 2 Orten.

Ein vielleicht unlösbares Problem

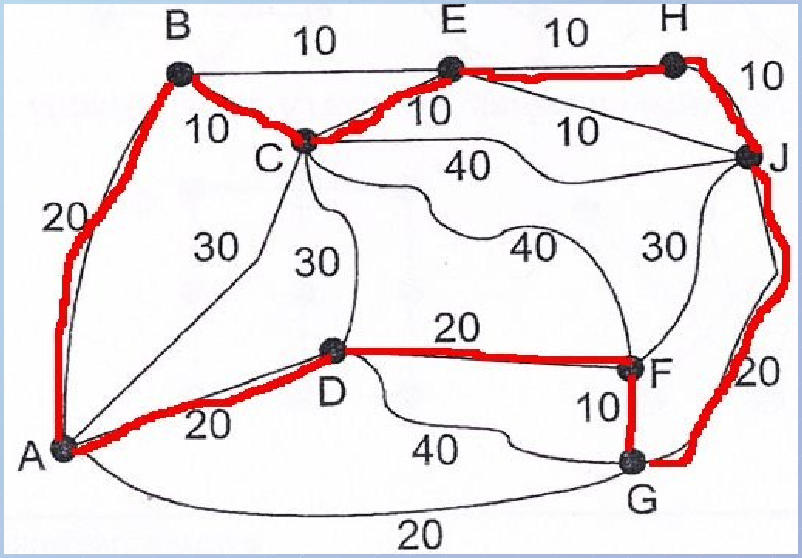
- <u>Lösung:</u>

  Verwende das Prinzip längste Wege zu vermeiden.

  Als einzig mögliche Lösung ergibt sich die eingezeichnete Route.

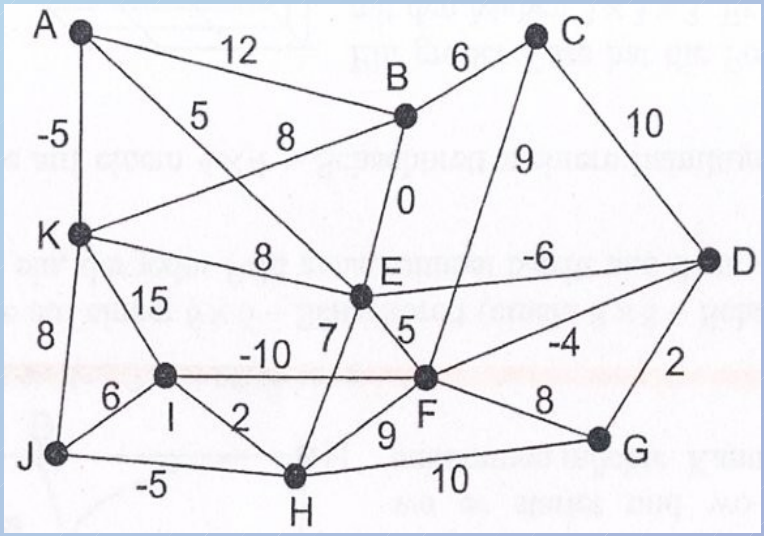
  Die Fahrt dauert 130 min.

  Was ist aber mit folgendem Problem?



Ein vielleicht unlösbares Problem

- <u>Aufgabe:</u>



Ein LKW-Fahrer will auf seiner Fahrt den größtmöglichen Gewinn machen.

Hier gibt es auch negative Zahlen, die Verlust auf einer Strecke bedeuten, z.B. durch eine Leerfahrt hervorgerufen.

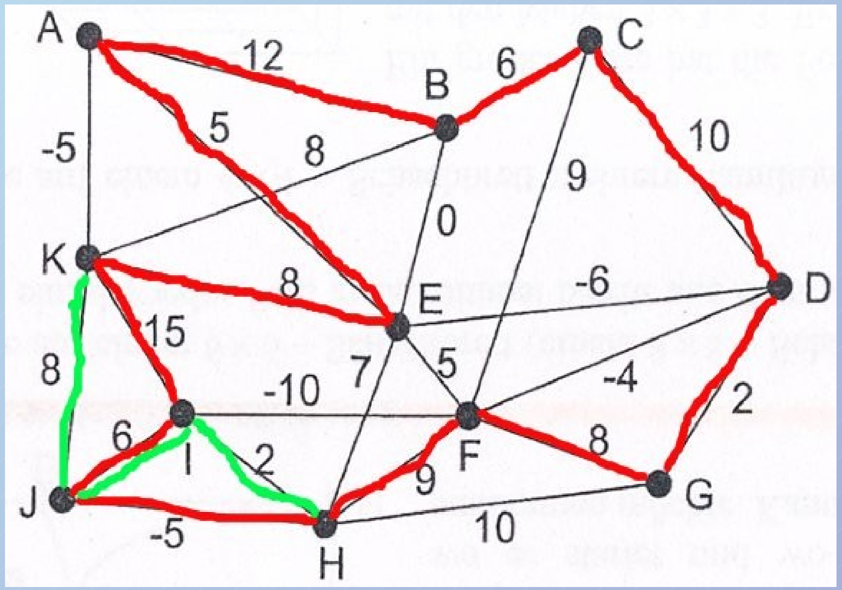
Gilt hier nun auch, alle dem Wert nach kleinsten Kanten zu meiden?

Ein vielleicht unlösbares Problem

- Lösung:

  Nein!

  Es existieren 2 beste Routen, wobei, die eine sogar eine Kante besucht, deren Wert kleiner als 0 ist, dies aber mit großen Werten der nächsten Kanten ausgleicht. (s. Bild)



  ➔ Das heißt, nicht immer kann man davon ausgehen, die beste Route zu finden, wenn man die Kanten mit den kleinsten (im anderen Bsp. größten) Werten meidet.

Ein vielleicht unlösbares Problem

- Erwünscht wäre Algorithmus, der zu jedem beliebigen bewerteten Graphen den hamiltonschen Kreis mit dem niedrigsten Wert findet
- Zur Zeit gibt es lediglich gute Näherungen, die mehr oder weniger schnell sind und darauf beruhen Kanten mit großen Werten zu meiden (nicht immer optimal, s. Bsp.)
- <u>Annahme:</u>
  - Hätte man eine Lösung des TSP gefunden, wäre dies gleichzeitig auch die Lösung des Problems der hamiltonschen Graphen
    - ➔ Man könnte darauf basierend untersuchen ob Graph hamiltonsch ist oder nicht

Ein vielleicht unlösbares Problem

- Beweis:
  - Ergänzen den zu untersuchenden Graphen zu einem vollständigen
  - An Kanten des ursprünglichen Graphen schreiben wir eine „0“, an neue Kanten eine „1“
  - Ist TSP gelöst erhalten wir hamiltonschen Kreis mit kleinstem Wert „z“ als Summe der Kanten:
    - Ist z = 0: nur Kanten des urspr. Graphen benutzt
      - ➔ Ursprünglicher Graph ist hamiltonsch
    - Ist z > 0: auch neue Kanten benutzt
      - ➔ Ursprünglicher Graph ist nicht hamiltonsch

Bäcker mit Kenntnissen in Graphentheorie

Bäcker mit Kenntnissen in Graphentheorie

- Bewertete Graphen in Produktionsprozessen
  - Beispiel:
    - Bäcker backt an einem Tag Mischbrot, Baguettebrot, Zwiebelbrötchen, Rosinenbrötchen und Knusperbrötchen
    - Nach einer Sorte Maschine reinigen und neu einstellen

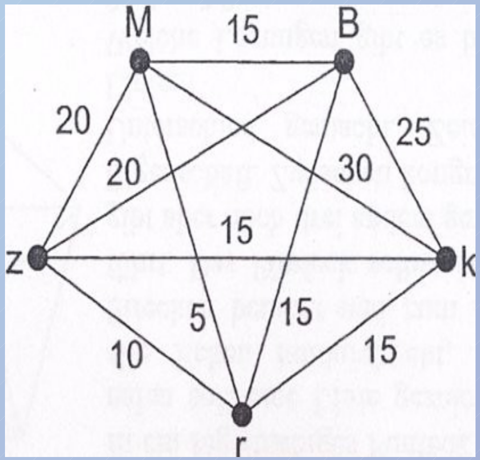
  Jede Änderung dauert gewisse Zeit

  <u>Ziel:</u>

  ➔ Unproduktive Zwischenzeiten möglichst kurz halten

Bäcker mit Kenntnissen in Graphentheorie

- <u>Umwandlung in Graphenaufgabe:</u>
  - Erhalten wieder bekannte Aufgabe:
  - Ges.: hamiltonscher Kreis mit möglichst geringer Gesamtbewertung



  - 2 verschiedene Lösungen:
    - M-r-k-z-B-M oder M-r-z-k-B-M mit je 70 ZE´en

Fazit

Fazit

- Konnten Graphen finden, die nicht hamiltonsch waren
  - ➔ Wurde Ecke entfernt und mit ihr alle dazugehörigen Kanten, war Restgraph nicht zusammenhängend
  - ➔ „Eckengelöschte Graphen“

- Es war jedoch unmöglich einen Algorithmus zu finden, der uns zeigen konnte, dass ein Graph hamiltonsch ist