Übungen Diskrete Mathematik - SS 2005

Prof. C. Schelthoff

Blatt 1: Mit Händen rechnen, Das Taubenschlagprinzip

1. Beweisen Sie die Richtigkeit der Methode "Mit Händen multiplizieren".

2. a) Wählen Sie 8 Zahlen zwischen 1 und 14 aus, so dass keine eine andere teilt.
b) Zeigen: Sie Bei einer Auswahl von n+1 Zahlen aus den Zahlen von 1 bis 2n existieren stets 2, die einander teilen und 2 die teilerfremd sind.

3. Zeigen Sie: In jeder 6-er Clique existiert entweder eine 3-er Clique oder eine 3-er Anti-Clique

4. Zeigen Sie mit dem Taubenschlagprinzip:

Aus beliebigen 13 Zahlen lassen sich je 2 finden, deren Differenz durch 12 teilbar ist.

Aus beliebigen 13 Zahlen lassen sich stets 3 finden, so dass die Differenz von je 2 Zahlen durch 6 teilbar ist.

5. Zeigen Sie: In einem Rechteck, der Länge n und Breite m, welches x Punkte enthält, sind stets zwei höchstens $\sqrt{2}$ Einheiten von einander entfernt. Wie groß ist x (mindestens)?

6. In einem Würfel der Kantenlänge 4 werden x Punkte verteilt. Wie gross muss x sein, damit es mind. zwei Punkte gibt, deren Abstand d$\leq \sqrt{3}$ ist?

7. Zeigen oder widerlegen Sie: Aus 6 beliebigen Zahlen finden Sie stets zwei, deren Summe durch 5 teilbar ist.

8. Zeigen Sie:es gibt (bis auf Spaltenvertauschung) genau ein monochromatisches Rechteck in eine 4x6-Rechteck

9. Formulieren Sie den Satz: In einem Rechteck der Größe n mal m werden k_0 Punkte verteilt. Der minimale Abstand ist dann größer als ...

Blatt 2: Fibonacci

1. Zeigen Sie: Für die Fibonacci-Zahlen f_n gilt (sogar für beliebige Startwerte f_0 und f_1)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} &= z \\ \text{mit } z &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Von Interesse ist nun die direkte Berechnung von f_n (ohne die obige Rekursion anzuwenden)

Bei den Wachstumsprozessen sahen wir eine Entwicklung gemäß q^n und erhoffen uns auch hier eienen ähnlichen Verlauf. Setzen wir versuchsweise $f_n = q^n$ ein so erhalten wir

$$q^n = q^{n-1} + q^{n-2} \tag{1}$$

Dividieren wir diese Gleichung durch q^{n-2} so erhalten wir

$$q^2 = q + 1$$

Dieses führt zur quadratischen Gleichung

$$q^2 - q - 1 = 0$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} q_{1,2} &= \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} \qquad (2) \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Die Zahl $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ heißt der "goldene Schnitt". Wir haben also gezeigt, $u_n = q_1^n$ und $v_n = q_2^n$ erfüllen die Fibonacci Gleichung $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ bzw. $v_n = v_{n-1} + v_{n-2}$. Welches jedoch die Lösung ist, hängt nun von den Anfangsbedingungen ab. Hierzu betrachten wir eine beliebige Kombination $f_n = a \cdot u_n + b \cdot v_n$. Auch für diese gilt:

$$\begin{aligned} f_n &= a \cdot u_n + b \cdot v_n \\ &= a \cdot (u_{n-1} + u_{n-2}) + b \cdot (v_{n-1} + v_{n-2}) \\ &= a \cdot u_{n-1} + b \cdot v_{n-1} + a \cdot u_{n-2} + b \cdot v_{n-2} \\ &= f_{n-1} + f_{n-2} \end{aligned}$$

Also: auch jede beliebige Kombination $f_n = a \cdot u_n + b \cdot v_n. = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n +$

$b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ erfüllt die Fibonacci-Gleichung. Die Zahlen a und b können nun so gewählt werden, dass die Anfangsbedingungen erfüllt sind.

Beispiel: Lösung der Fibonacci-Gleichung mit $f_0 = f_1 = 1$:

$$\begin{aligned} f_0 &= a + b = 1 \\ f_1 &= a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

Setzen wir aus der ersten Gleichung $b = 1 - a$ in die zweite ein:

$$\begin{aligned} a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + (1-a) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) &= 1 \\ a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) &= 1 \\ a \cdot \sqrt{5} &= 1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ a &= \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ b &= 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{2\sqrt{5} - 1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Und erhalten die explizite Formel für die Fibonacci-Zahlen

$$\begin{aligned} f_n &= a \cdot u_n + b \cdot v_n \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{aligned}$$

So ist z.B. $f_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{20} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{20} = 10946$

Ausgerechnet ergibt die Formel $\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n =$ $0,72361 \cdot 1.618^n + 0,27639 \cdot (-0,61803)^n$. Für große n kann also die Näherung

$$f_n = 0.72361 \cdot 1.618^n \tag{3}$$

verwendet werden.

In anderen Fällen müssen entweder die Nullstellen der Gleichung anders berechnet werden oder aus anderen Anfangsbedingungen ergeben sich ebenfalls andere Gleichungen.

Definition 1 *Gleichungen der Form $f_n = c \cdot y_{n-1} + d \cdot y_{n-2}$ heissen **Lucas-Gleichungen.** Die Lösungen können wie bei den Fibonacci-Folgen durch den Ansatz $f_n = q^n$ berechnet werden.*

Dies führt auf die Gleichung

$$q^2 - c \cdot q - d = 0 \tag{4}$$

Beispiel: Ausbreitung von Seuchen

Eine Seuche werde nach einem Jahr Inkubationszeit übertragen. Geht man bei einem HIV-Infizierten von weiteren 6 Ansteckungen pro Jahr aus und betrachtet die Anfangswerte (in Tsd) $f_0 = 10, f_1 = 40$, so ergibt sich zunächst als bestimmende Gleichung

$$f_n = f_{n-1} + 6 \cdot f_{n-2} \tag{5}$$

Mit dem Ansatz $y_n = q^n$ ergibt sich das Polynom

$$\begin{aligned} q^2 &= q + 6 \\ q^2 - q - 6 &= 0 \\ q_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} \\ q_1 &= -2, q_2 = 3 \end{aligned}$$

und damit

$$f_n = a \cdot (-2)^n + b \cdot 3^n \tag{6}$$

Die Anfangsbedingungen liefern

$$\begin{aligned} 10 &= a + b \\ 40 &= -2a + 3b \end{aligned}$$

Mit der Lösung :$a = -2, b = 12$ (nachrechnen) und damit

$$f_n = -2 \cdot (-2)^n + 12 \cdot 3^n \tag{7}$$

So ergibt sich nach 4 Jahren eine Infektionsrate von $f_4 = -2 \cdot (-2)^4 + 12 \cdot 3^4 =$ 940.0

Nach 10 Jahren ergibt sich $f_{10} = -2 \cdot (-2)^{10} + 12 \cdot 3^{10} = 7065\,40$ Tsd, also etwa 700 Millionen Infizierte.

Näherungsweise kann der Verlauf beschrieben werden durch $f_n = 12 \cdot 3^n$

Induktion

Zeigen Sie

Zu Punkten im Rechteck:

Wir betrachten ein Rechteck der Länge n und der Breite m. Dieses hat damit die Fläche $n \cdot m$. (Ohne Einschränkung $n \geq m$) In diesem werden k_0 +1

Punkte verteilt. Was lässt sich über den Höchstabstand zweier Punkte sagen?

Gesucht ist eine Zahl k, so dass wir k Quadrate in das Rechteck legen können. Zum einen ist dann die Quadratfläche

$$a^2 = \frac{n \cdot m}{k} \tag{8}$$

also die Seitenlänge

$$a = \sqrt{\frac{n \cdot m}{k}} \tag{9}$$

Da nun aber nicht für jede beliebige Zahl für k genommen werden kann, muss darauf geachtet werden, dass die Kantenlänge ein Teiler der Gesamtlänge ist, also:

$$\frac{n}{a} = \frac{n}{\sqrt{\frac{n \cdot m}{k}}} = \sqrt{\frac{k \cdot n}{m}} \in \mathbb{N} \tag{10}$$

Damit muss

$$\frac{k \cdot n}{m} = l^2$$

sein. Wird der Bruch $\frac{n}{m}$ gekürzt, verbleibt

$$\frac{k \cdot n'}{m'} = l^2 \tag{11}$$

Damit muss k ein Vielfaches von m' sein und durch analoges $\frac{m}{a}$ muss ganzzahlig sein, folgt dass k ein Vielfaches von n' sein. Damit

$$k = n' \cdot m' \cdot x^2 \tag{12}$$

wobei k nun so groß wie möglich gewählt wird, dass es kleiner als k_0 bleibt:

$$n' \cdot m' \cdot x^2 \leq k_0$$

also

$$\begin{aligned} x &\leq \sqrt{\frac{k_0}{n' \cdot m'}} \\ x &= \left\lfloor \sqrt{\frac{k_0}{n' \cdot m'}} \right\rfloor \end{aligned}$$

und damit

$$k = n' \cdot m' \cdot \left(\left\lfloor \sqrt{\frac{k_0}{n' \cdot m'}} \right\rfloor \right)^2$$

Der Abstand innerhalb eines Quadrates ist dann maximal $\sqrt{2 \cdot \frac{n \cdot m}{k}}$ und zwei Punkte müssen laut Schubladenprinzip in einem Quadrat liegen und haben damit maximal diesen Abstand.

Beispiel:

Wir betrachten ein Rechteck der Aussmasse 6x8 und 1000 Punkte.

Es ist damit $\frac{n}{m} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = \frac{n'}{m'}$ und damit

$$\begin{aligned} k &= 4 \cdot 3 \cdot \left(\left\lfloor \sqrt{\frac{1000}{12}} \right\rfloor \right)^2 \\ &= 12 \cdot 81 = 972 \end{aligned}$$

Also: 972 Quadrate können eingezeichnet werden. 973 oder mehr Punkte haben dann 2 Punkte die weniger als $\sqrt{2 \cdot \frac{n \cdot m}{k}} = \sqrt{2 \cdot \frac{8 \cdot 6}{972}} = \frac{2}{9}\sqrt{2} = 0,3$