



Hochschule Aachen

Probeklausur Mathematik I für Chemiker und Biologen

WS 02/03 - Prof. C. Schelthoff

(Bitte lösen Sie etwa 14 Aufgaben in den 3h - Rest zuhause)

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner, Selbsterstellte Zusammenfassung - Keine Bücher oder Vorlesungsmanuskripte

1.) (6P) Berechnen Sie mittels Horner-Schema $f(3)$ und $g(x) = \frac{f(x)}{x-3} = p(x) + \frac{r(x)}{x-3}$ als Ergebnis der Polynomdivision mit Rest zu

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 1$$

2.) (6P) Wie lautet die Zerlegung in Linearfaktoren der Funktion

$$f(x) = x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 27x + 10$$

3.) (8P *) Bestimmen Sie das Newton-Interpolationspolynom zu folgender Meßreihe

$$x_i \quad 1 \quad 3 \quad 4 \quad 7$$

$$y_i \quad 0 \quad 2 \quad 3 \quad 0$$

4.) (6P) Bestimmen Sie die Lösungen von $\sqrt{2-2x} = x-1$

5) (6P) Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = 2x + 3$ an der Stelle x_0 mit Hilfe des Differenzenquotienten

6) (12P+5P*) Differenzieren Sie:

a) $f(x) = x^2 \cdot \cos(x) + e^x$ b) $f(x) = \sqrt{2x-4}$

c) $f(x) = 2^x \cdot \ln(x)$ d*) $f(x) = 2^{2x+1}$ e) $f(x) = \ln\left(\frac{a \cdot x^2}{4+b}\right)$

7) (8P) Zwischen x-Achse, y-Achse und der Funktion $f(x) = e^{-x}$ soll ein Rechteck möglichst großer Fläche gelegt werden. Skizzieren Sie zunächst das Problem und lösen Sie diese anschließend mit Hilfe der Differentialrechnung

8) (6P *) Berechnen Sie numerisch für $h=0,1$ die Ableitung mit dem zentralen und rechtsseitigen Differenzenquotienten der Funktion $f(x) = x \cdot e^x$ an der Stelle $x_0 = 0$. Wie lautet im Vergleich hierzu die exakte Lösung?

9) (10P) Durch welche Parabel lässt sich die Funktion $f(x) = x \cdot \cos(x) + x^2$ im Bereich um $x_0 = 0$ bestmöglich approximieren?

10) (8P) Lösen Sie $e^x = 2$ numerisch mit dem Tangentenverfahren von Newton. Starten Sie bei $x_0 = 0$ und berechnen Sie vier Iterationsschritte.

11) (8P *) Die Funktion $f(x) = 3x + 5$ wird um die x-Achse rotiert. Wie groß ist die hierbei entstehende Mantelfläche im Bereich $x=0$ bis $x=2$?

12) (8P) Berechnen Sie $\int_0^1 \frac{1}{x^3+1} dx$ numerisch mit $n=4$ Streifen.

13) (4P) Berechnen Sie das Volumen des Spates aus

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{und} \quad \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

14) (6P) Wie muß der Parameter λ gewählt werden, damit der Vektor $\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 2 \end{pmatrix}$ in der

Ebene liegt, die durch die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{und} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ geht?}$$

15) a) (8P) Wie weit ist die Ebene

$$E_1 : \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ vom Ursprung entfernt? Und wie lautet}$$

die Ebenengleichung in Normalenform?

b) (10P) Wo schneidet die Ebene aus Teil a) die Ebene E_2 mit:

$$E_2 : \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 16) Auf dem Einheitskreis bewege sich ein Punkt mit $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Weiterhin ist ein ortsabhängiges Kraftfeld gegeben mit $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- a) (2P) Skizzieren Sie den Weg von $t = 0$ bis $t = \frac{\pi}{2}$.
- b) (9P *) Welche Arbeit wird verrichtet, wenn der Massenpunkt durch dieses Kraftfeld bewegt wird?

17) (10P) Berechnen Sie zu $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$ das vollständige Differential in $x_0 = 2$. Geben Sie Näherungen für die Stellen $x = 1,9$ und $x = 2,2$ mit Hilfe des Differentials an.

18) (12P) Berechnen Sie

$$\text{a) } \int_1^2 x^2 \cdot \ln(x^3 + 1) dx \quad \text{b) } \int (x^3 - 2) \cdot \ln(x) dx \quad \text{c) } \int \frac{x^3 - 3x + 1}{(x-1)^2 \cdot x} dx$$

19) (6P) Berechnen Sie den Grenzwert von $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin(x) - x}$

20) (3P *) Bitte beschreiben Sie: Wann verwendet man numerische Integration statt Stammfunktion?

21) (8P) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n 1 + 2 \cdot i = n^2 + 2 \cdot n$$

Viel Erfolg! Musterlösung: Morgen 9:15 Fragestunde: 11. März, 10 Uhr A02!