Angewandte Mathematik - Probeklausur
SS 10 - Prof. Schelthoff

1. Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{xy}$$

im Punkt $\vec{x}_0 = (x_0, y_0) = (2,3)$ in Richtung des (bereits normierten) Vektors

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Skalarproduktes

$$D_v(f) = \text{grad}\, f \cdot \vec{v}$$

2. Berechnen Sie zur Funktion $f(x,y) = e^{x-1} \cdot y^2$ die Tangentialebene im Punkt $x_0 = 1, y_0 = 3$ in kartesischer Form, also

$$T(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0,y_0) \cdot (y - y_0)$$

3. Berechnen Sie alle komplexen Lösungen in der kartesischen Form der Gleichung

$$z^2 = 16i$$

4. Berechnen Sie das Volumen der Funktion $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ über den Ring zwischen den Kreisen mit Radius 1 und 2 um den Ursprung für positive x- und y-Koordinaten. Fertigen Sie zunächst eine Skizze des Integrationsgebietes an.

5. Lösen Sie die DGL zweiter Ordnung

a)

$$y'' + 5y' + 6y = 5\cos(x)$$

b)

$$y'' + 6y' + 9y = 32e^x$$

c)

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 13y &= 13x^2 + x \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 1 \end{aligned}$$

d)

$$y'' + 5y' + 6y = 6e^{-2x}$$

6. Lösen Sie die DGL des Federpendels im Vakuum (keine Reibung)

$$\begin{aligned} m \cdot y''(t) + c \cdot y(t) &= mg \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

und beschreiben Sie wie der Funktionsverlauf ist (Wie gross sind Minima/Maxima, welcher Funktionstyp liegt vor?).

7. Welcher Punkt (x_0, y_0) auf dem Einheitskreis, d.h. $x_0^2 + y_0^2 = 1$ hat das größte bzw kleinste Produkt der Koordinaten, also ein lokales Extremum der Funktion

$$f(x, y) = xy$$

8. Welcher Punkte der Geraden $y = 3x - 2$ hat den kleinsten quadratischen euklidischen Abstand $d = x^2 + y^2$ zum Ursprung des Koordinatensystems ?

9. Lösen Sie die Differentialgleichungen zur gesuchten Funktion $y(x)$

a)

$$y' = x + \frac{y}{x} + y$$

b)

$$\begin{aligned} y' &= (x + y)^2 - 1 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} y' &= y - x^2 \\ y(0) &= 5 \end{aligned}$$

d)

$$y' - 2xy = \frac{1}{x} e^{x^2}$$

10. Berechen Sie zur Messung

x_k	-2	0	1	1
y_k	8	5	0	-1

die Regressionsgerade und den Korrelationskoeffizienten.

Angewandte Mathematik - Probeklausur
SS 10 - Prof. Schelthoff

1. Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{xy}$$

im Punkt $\vec{x}_0 = (2,3)$ in Richtung des (bereits normierten) Vektors

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Skalarproduktes

$$D_v(f) = \operatorname{grad} f \cdot \vec{v}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} D_v(f) &= \operatorname{grad} f \cdot \vec{v} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-1}{y_0 x_0^2} \\ \frac{-1}{y_0^2 x_0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{-1}{y_0 x_0^2} + \frac{-1}{y_0^2 x_0} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{x_0 y_0^2} + \frac{1}{x_0^2 y_0} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{12} \right) = -\frac{5}{72}\sqrt{2} \end{aligned}$$

2. Berechnen Sie zur Funktion $f(x,y) = e^{x-1} \cdot y^2$ die Tangentialebene im Punkt $x_0 = 1, y_0 = 3$ in kartesischer Form, also

$$T(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0,y_0) \cdot (y - y_0)$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= e^{x-1} \cdot y^2 \Longrightarrow f(1,3) = 9 \\ f_x(x,y) &= e^{x-1} \cdot y^2 \Longrightarrow f_x(1,3) = 9 \\ f_y(x,y) &= e^{x-1} \cdot 2y \Longrightarrow f_x(1,3) = 6 \end{aligned}$$

$$T(x,y) = 9 + 9 \cdot (x-1) + 6 \cdot (y-3)$$

3. Berechnen Sie alle komplexen Lösungen in der kartesischen Form der Gleichung

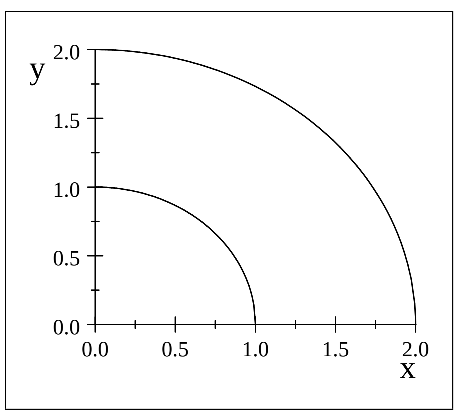
$$z^2 = 16i$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
z^2 &= 16 \cdot e^{i \cdot 90^0} \\
n &= 2 \\
\hat{r} &= 16 \Longrightarrow r = 4 \\
\hat{\varphi} &= 90^0 \\
\varphi_0 &= \frac{90^0 + 0 \cdot 360^0}{2} = 45^0 \\
z_0 &= 4 \cdot e^{i \cdot 45^0} = 2\cos(45^0) + i \cdot 4\sin(45^0) \\
&= 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i \\
\varphi_1 &= \frac{90^0 + 1 \cdot 360^0}{2} = 225^0 \\
z_1 &= 4 \cdot e^{i \cdot 225^0} = 4\cos(225^0) + i \cdot 4\sin(225^0) \\
&= 4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i
\end{aligned}$$

4. Berechnen Sie das Volumen der Funktion $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ über den Ring zwischen den Kreisen mit Radius 1 und 2 um den Ursprung für positive x- und y-Koordinaten. Fertigen Sie zunächst eine Skizze des Integrationsgebietes an.

Lösung:



$$\begin{aligned}
\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=1}^{2}\frac{1}{r^2}rdrd\varphi &= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=1}^{2}\frac{1}{r}drd\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\ln(r)\right]_{r=1}^{2}d\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\ln(2)d\varphi = \ln(2)\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

5) Lösen Sie die DGL zweiter Ordnung

a)

$$y'' + 5y' + 6y = 5\cos(x)$$

b)

$$y'' + 6y' + 9y = 32e^{x}$$

c)

$$\begin{aligned}
y'' - 6y' + 13y &= 13x^2 + x \\
y(0) &= 1 \\
y'(0) &= 1
\end{aligned}$$

d)

$$y'' + 5y' + 6y = 6e^{-2x}$$

Lösung:

a)

Allgem. Lsg der homogenen DGL

Char. Gleichung

$$\begin{aligned}
\alpha^2 + 5\alpha + 6 &= 0 \\
\alpha_{1,2} &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} \\
\alpha_1 &= -3 \vee \alpha_2 = -2
\end{aligned}$$

$$y_h = \lambda_1 e^{-3x} + \lambda_2 e^{-2x}$$

Partik. Lsg

$$\begin{aligned}
y_p &= A\sin(x) + B\cos(x) \\
y_p' &= A\cos(x) - B\sin(x) \\
y_p'' &= -A\sin(x) - B\cos(x) \\
-A\sin(x) - B\cos(x) + 5(A\cos(x) - B\sin(x)) + 6(A\sin(x) + B\cos(x)) &= 5\cos(x) \\
-A - 5B + 6A &= 0 \Longrightarrow A = B \\
-B + 5B + 6B &= 5 \Longrightarrow B = A = \frac{1}{2} \\
y_p &= \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x)
\end{aligned}$$

Allgem. Lsg der inhom. DGL

$$y = y_h + y_p = \lambda_1 e^{-3x} + \lambda_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x)$$

b)
Allgem. Lsg der homogenen DGL
Char. Gleichung

$$\begin{aligned}
\alpha^2 + 6\alpha + 9 &= 0 \\
\alpha_{1,2} &= -3 \pm \sqrt{9-9} \\
\alpha_{1,2} &= -3
\end{aligned}$$

$$y_h = (\lambda_1 + \lambda_2 x)\, e^{-3x}$$

Partik. Lsg

$$\begin{aligned}
y_p &= Ae^x \\
y_p' &= Ae^x \\
y_p'' &= Ae^x \\
Ae^x + 6Ae^x + 9Ae^x &= 16Ae^x = 32e^x \\
&\Longrightarrow A = 2 \\
y_p &= 2e^x
\end{aligned}$$

Allgem. Lsg der inhom. DGL

$$y = y_h + y_p = (\lambda_1 + \lambda_2 x)\, e^{-3x} + 2e^x$$

c)
Allgem. Lsg der homogenen DGL
Char. Gleichung

$$\begin{aligned}
\alpha^2 - 6\alpha + 13 &= 0 \\
\alpha_{1,2} &= 3 \pm \sqrt{9-13} \\
\alpha_{1,2} &= 3 \pm 2i
\end{aligned}$$

$$y_h = e^{3x}\,(\lambda_1 \cos(2x) + \lambda_2 \sin(2x))$$

Partik. Lsg

$$\begin{aligned}
y_p &= ax^2 + bx + c \\
y_p' &= 2ax + b \\
y_p'' &= 2a \\
2a - 6(2ax+b) + 13(ax^2+bx+c) &= x^2 \cdot 13a + x \cdot (-12a + 13b) + (2a - 6b + 13c) = 13x^2 + x \\
&\Longrightarrow a = 1 \\
-12 + 13b &= 1 \Longrightarrow b = 1 \\
2 - 6 + 13c &= 0 \\
13c &= 4 \\
c &= \frac{4}{13} \\
y_p &= x^2 + x + \frac{4}{13}
\end{aligned}$$

Allgem. Lsg der inhom. DGL

$$y = y_h + y_p = e^{3x}\left(\lambda_1 \cos(2x) + \lambda_2 \sin(2x)\right) + x^2 + x + \frac{4}{13}$$

$$\begin{aligned}
y(0) &= 0 \Longrightarrow \lambda_1 + \frac{4}{13} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -\frac{4}{13} \\
y' &= 3e^{3x}\left(\lambda_1 \cos(2x) + \lambda_2 \sin(2x)\right) \\
&\quad + e^{3x}\left(-2\lambda_1 \sin(2x) + 2\lambda_2 \cos(2x)\right) \\
&\quad + 2x + 1 \\
y'(0) &= 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 1 \\
&= -\frac{12}{13} + 2\lambda_2 + 1 = 0 \\
2\lambda_2 &= -\frac{1}{13} \\
\lambda_2 &= -\frac{1}{26}
\end{aligned}$$

$$y = y_h + y_p = e^{3x}\left(-\frac{4}{13}\cos(2x) - \frac{1}{26}\sin(2x)\right) + x^2 + x + \frac{4}{13}$$

d)

Allgem. Lsg der homogenen DGL

$$\begin{aligned}
\alpha^2 + 5\alpha + 6 &= 0 \\
\alpha_{1,2} &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} \\
\alpha_1 &= -3 \vee \alpha_2 = -2
\end{aligned}$$

$$y_h = \lambda_1 e^{-3x} + \lambda_2 e^{-2x}$$

Partik. Lsg

$$\begin{aligned}
y_p &= Axe^{-2x} \\
y_p' &= Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x} \\
&= Ae^{-2x} \cdot (1-2x) \\
y_p'' &= -2Ae^{-2x} - 2Ae^{-2x} \cdot (1-2x) \\
&= 2Ae^{-2x}(-1-1+2x) \\
&= 4Ae^{-2x}(x-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4Ae^{-2x}(x-1) + 5Ae^{-2x} \cdot (1-2x) + 6Axe^{-2x} &= e^{-2x} \cdot (4A(x-1) + 5A \cdot (1-2x) + 6Ax) \\
&= Ae^{-2x} = 6e^{-2x} \\
A &= 6 \\
y_p &= 6xe^{-2x}
\end{aligned}$$

Allgem. Lsg der inhom. DGL

$$y = y_h + y_p = \lambda_1 e^{-3x} + \lambda_2 e^{-2x} + 6xe^{-2x}$$

6. Lösen Sie die DGL des Federpendels im Vakuum (keine Reibung)

$$\begin{aligned}
m \cdot y''(t) + c \cdot y(t) &= mg \\
y(0) &= 0 \\
y'(0) &= 0
\end{aligned}$$

und beschreiben Sie wie der Funktionsverlauf ist (Wie gross sind Minima/Maxima, welcher Funktionstyp liegt vor?).

Lösung: Superposition

$$y''(t) + \frac{c}{m} \cdot y(t) = g$$

$$y_p = \frac{mg}{c}$$

Allg. Lsg der homogenen DGL

$$\begin{aligned}
\alpha^2 + \frac{c}{m} &= 0 \\
\alpha_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{c}{m}} i \\
y_h &= \lambda_1 \cos(\sqrt{\frac{c}{m}} t) + \lambda_2 \sin(\sqrt{\frac{c}{m}} t)
\end{aligned}$$

Allg. Lsg der inhomogenen DGL

$$y = \frac{mg}{c} + \lambda_1 \cos(\sqrt{\frac{c}{m}}t) + \lambda_2 \sin(\sqrt{\frac{c}{m}}t)$$

AWP

$$\begin{aligned} y(0) &= \frac{mg}{c} + \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 &= -\frac{mg}{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(t) &= \sqrt{\frac{c}{m}} \cdot \frac{mg}{c} \sin(\sqrt{\frac{c}{m}}t) + \lambda_2 \sqrt{\frac{c}{m}} \cos(\sqrt{\frac{c}{m}}t) \\ y'(0) &= \lambda_2 \sqrt{\frac{c}{m}} = 0 \Longrightarrow \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{mg}{c} - \frac{mg}{c} \cos(\sqrt{\frac{c}{m}}t) \\ &= \frac{mg}{c} \cdot \left(1 - \cos(\sqrt{\frac{c}{m}}t)\right) \end{aligned}$$

Ist eine periodische Oszillation um den Mittelwert $\frac{mg}{c}$ mit den Maximalauslenkungen 0 und $2\cos(\sqrt{\frac{c}{m}}t)$.

7) Welcher Punkt (x_0, y_0) auf dem Einheitskreis, d.h. $x_0^2 + y_0^2 = 1$ hat das größte bzw kleinste Produkt der Koordinaten, also ein lokales Extremum der Funktion

$$f(x, y) = xy$$

Lösung:

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{aligned} L_x &= y + 2\lambda x = 0 \\ L_y &= x + 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda &= x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ \lambda &= -\frac{y}{2x} \\ x - \frac{y^2}{x} &= 0 \Longrightarrow x^2 = y^2 \\ x &= y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Kandidaten:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$$
$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$$
$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

Hesse-Matrix:

$$\begin{aligned} L_{xx} &= 2\lambda \\ L_{xy} &= 1 \\ L_{yy} &= 2\lambda \\ L_{x\lambda} &= 2x \\ L_{y\lambda} &= 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} 2\lambda & 1 & 2x \\ 1 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix} \\ \det H &= -8\lambda x^2 + 8xy - 8\lambda y^2 = -8(x^2+y^2)\lambda + 8xy \\ &= 8(xy - \lambda) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) : \det H > 0 : Lok.Max.\ f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$$
$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) : \det H > 0 : Lok.Max.\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$$
$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) : \det H < 0 : Lok.Min.\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) : \det H < 0 : Lok.Min.\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$$

8. Welcher Punkte der Geraden $y = 3x - 2$ hat den kleinsten quadratischen euklidischen Abstand $d = x^2 + y^2$ zum Ursprung des Koordinatensystems ?

Lösung:

Wir betrachten das Quadrat des Abstandes, welches dort minimal wird, wo der Abstand minimal wird, also

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2+y^2 \\ g(x,y) &= y-3x+2=0 \end{aligned}$$

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda\cdot(y-3x+2)$$

$$\begin{aligned} L_x &= 2x-3\lambda=0 \\ L_y &= 2y+\lambda=0 \\ L_\lambda &= y-3x+2=0 \\ \lambda &= \frac{2}{3}x \\ 2y+\frac{2}{3}x &= 0 \Longrightarrow y=-\frac{1}{3}x \\ -\frac{1}{3}x-3x+2 &= 0 \Longrightarrow \frac{10}{3}x=2 \\ x &= \frac{6}{10}=0,6 \\ y &= -\frac{2}{10}=-0,2 \end{aligned}$$

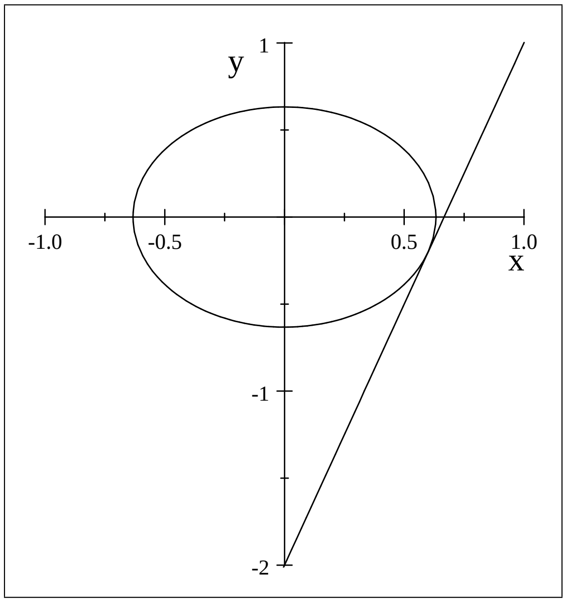
Kandidaten:

$$(0,6,-0,2,0,4)$$

Hesse-Matrix:

$$\begin{aligned} L_{xx} &= 2 \\ L_{xy} &= 0 \\ L_{yy} &= 2 \\ L_{x\lambda} &= -3 \\ L_{y\lambda} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \det H &= -20<0 \\ & \quad \text{lokales Minimum} \\ f((0,6,-0,2) &= 0,36+0,04=0,4 \\ \text{Abstand} &: \sqrt{0.4}=0,632 \end{aligned}$$



9. Lösen Sie die Differentialgleichungen zur gesuchten Funktion $y(x)$
a)

$$y' = x + \frac{y}{x} + y$$

b)

$$\begin{aligned} y' &= (x+y)^2 - 1 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} y' &= y - x^2 \\ y(0) &= 5 \end{aligned}$$

d)

$$y' - 2xy = \frac{1}{x} e^{x^2}$$

Lösung:
a) Substitution

$$\begin{aligned} z(x) &= \frac{y(x)}{x} \\ y &= z \cdot x \\ y' &= z'x + z \end{aligned}$$

ergibt

$$\begin{aligned}
z'x + z &= x + z + z \cdot x \\
z'x &= x + z \cdot x \\
z' &= 1 + z \\
\int \frac{1}{1+z} dz &= \int 1 dx \\
\ln(1+z) &= x + \tilde{c} \\
z(x) &= ce^x - 1 \\
y(x) &= (ce^x - 1) \cdot x
\end{aligned}$$

b) Substitution

$$\begin{aligned}
z(x) &= x + y(x) \\
y &= z - x \\
y' &= z' - 1
\end{aligned}$$

ergibt

$$\begin{aligned}
z' - 1 &= z^2 - 1 \\
\int \frac{1}{z^2} dz &= \int 1 dx \\
-\frac{1}{z} &= x + c \\
z &= \frac{-1}{x+c} \\
y &= \frac{-1}{x+c} - x
\end{aligned}$$

AWP:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{-1}{c} \\
c &= -1
\end{aligned}$$

$$y = \frac{-1}{x-1} - x$$

c)

$$\begin{aligned}
y' &= y - x^2 \\
y' - y &= -x^2
\end{aligned}$$

Linear inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten

Allg. Lsg der homogenen DGL

$$\begin{aligned} y_h' - y_h &= 0 \\ y_h &= ce^x \end{aligned}$$

Partik. Lsg

$$\begin{aligned} y_p &= ax^2 + bx + c \\ y_p' &= 2ax + b \end{aligned}$$

ergibt

$$\begin{aligned} 2ax + b - (ax^2 + bx + c) &= -x^2 \\ -ax^2 + (2a - b)x + (b - c) &= -x^2 \\ a &= 1 \\ b &= 2 \\ c &= 2 \\ y_p &= x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

Allg. Lsg der inhom. DGL

$$y = y_h + y_p = ce^x + x^2 + 2x + 2$$

AWP:

$$\begin{aligned} 5 &= y(0) = c + 2 \\ c &= 3 \\ y &= 3e^x + x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

d)

$$y' - 2xy = \frac{1}{x} e^{-x^2}$$

Variation der Konstanten
Homogene DGL

$$\begin{aligned} y' - 2xy &= 0 \\ y &= c \cdot e^{x^2} \end{aligned}$$

Variation der Konstanten

$$\begin{aligned} y &= c(x) \cdot e^{x^2} \\ y' &= c'(x) \cdot e^{x^2} + c(x) \cdot e^{x^2} \cdot 2x \\ &= c'(x) \cdot e^{x^2} + y \cdot 2x \\ y' - 2xy &= c'(x) \cdot e^{x^2} \end{aligned}$$

$$c'(x) \cdot e^{x^2} = \frac{1}{x} e^{x^2}$$

$$\begin{aligned} c'(x) &= \frac{1}{x} \\ c(x) &= \ln(x) + c \\ y &= (\ln(x) + c) \cdot e^{x^2} \end{aligned}$$

10. Berechen Sie zur Messung

$$\begin{array}{ccccc} x_k & -2 & 0 & 1 & 1 \\ y_k & 8 & 5 & 0 & -1 \end{array}$$

die Regressionsgerade und den Korrelationskoeffizienten.

Lösung:

$$\begin{aligned} \sum x_k &= 0 \\ \sum y_k &= 12 \\ \sum x_k^2 &= 6 \\ \sum x_k y_k &= -17 \\ n &= 4 \end{aligned}$$

Zu lösen

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & | & 12 \\ 0 & 6 & | & -17 \end{pmatrix}$$

liefert

$$\begin{aligned} a &= 3 \\ b &= -\frac{17}{6} \\ y &= 3 - \frac{17}{6} x \end{aligned}$$

Korrelationskoeffizient:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 0 \\ \bar{y} &= 3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sum (x-\bar{x})^2 &= 6 \\
\sum (y-\bar{y})^2 &= 5^2+2^2+3^2+4^2 \\
&= 54 \\
\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y}) &= -2\cdot 5+1\cdot(-3)+1\cdot(-4) = -17 \\
r_{x,y} &= \frac{-17}{\sqrt{6\cdot 54}} = -0,944
\end{aligned}
$$

d.h. es besteht ein stark negativer Zusammenhang.