

Probeklausur Mathematik II - Prof. C. Schelthoff

- 1) (8 Punkte) Berechnen Sie alle Lösungen in der kartesischen Form von

$$z^3 = \frac{1}{i}$$

- 2) (10 Punkte) Berechnen Sie zur Funktion $f(x, y) = e^{x-y-2}$ die Taylorentwicklung bis zum quadratischen Term in $x_0 = 1$ und $y_0 = 1$.

- 3) (8 Punkte) Berechnen Sie die Regressionsgerade $y = a + b \cdot x$ zu folgenden Meßwerten und zeichnen Sie Meßwerte und Gerade in ein Koordinatensystem

x_i	-2	0	1	4	7
y_i	7	0	3	-1	-5

- 4) (10 Punkte) Berechnen Sie mit dem Verfahren der Lagrange'schen Multiplikatoren die lokalen Extrema der Funktion

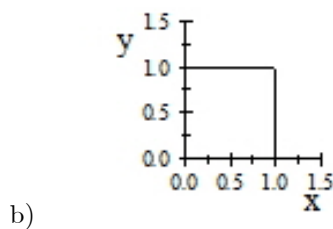
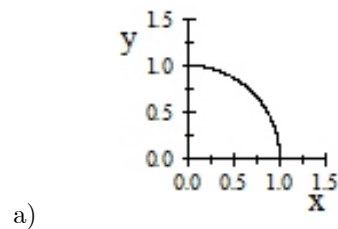
$$f(x, y) = x \cdot (1 - y)$$

unter der Nebenbedingung $2 \cdot x + y = 5$

- 5) (16 Punkte) Berechnen Sie das Volumen der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$$

über die folgenden Integrationsgebiete



- 6) (8 Punkte) Bestimmen Sie aus der Exponentialform für komplexe Zahlen ein Additionstheorem für $\cos(\alpha - \beta)$

- 7) (18 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungen folgender Differentialgleichungen

a) $y'' - 2y' + y = 4x^2 - 15x + 5$

b) $y' = \frac{y}{x} + 2$ mit $y(1) = 2$

c) $y' - 3x^2y = x^3 \cdot e^{x^3}$ mit $y(0) = 7$

8) (6 Punkte) Berechnen Sie die Tangentensteigung im Punkt $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ der Funktion

$$e^{2x} + 4 \sin(y) = 1$$

9) (8 Punkte) Berechnen Sie alle lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 + 14y$$

10) (8 Punkte) Berechnen Sie zur u.a. Messung den Korrelationskoeffizienten und interpretieren Sie diesen.

x_i	-2	0	1	4	7
y_i	7	1	3	-1	-5

Probeklausur Mathematik II - Prof. C. Schelthoff

1) (8 Punkte) Berechnen Sie alle Lösungen in der kartesischen Form von

$$z^3 = \frac{1}{i}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} &= \frac{-i}{-i^2} = -i = 1e^{i270^\circ} \\ \hat{r} &= 1 \Rightarrow r = 1 \\ \hat{\varphi} &= 270^\circ \\ n &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{270^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{3} = 90^\circ, z_0 = 1e^{i \cdot 90^\circ} = i \\ \varphi_1 &= \frac{270^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{3} = 210^\circ, z_1 = 1e^{i \cdot 210^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\ \varphi_2 &= \frac{270^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{3} = 330^\circ, z_2 = 1e^{i \cdot 330^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

2) (10 Punkte) Berechnen Sie zur Funktion $f(x, y) = e^{x-y-2}$ die Taylorentwicklung bis zum quadratischen Term in $x_0 = 1$ und $y_0 = 1$.

Lösung:

$$\begin{array}{ll} f(x, y) = e^{x-y-2} & f(1, 1) = e^{-2} \\ f_x(x, y) = e^{x-y-2} & f_x(1, 1) = e^{-2} \\ f_y(x, y) = -e^{x-y-2} & f_y(1, 1) = -e^{-2} \\ f_{xx}(x, y) = e^{x-y-2} & f_{xx}(1, 1) = e^{-2} \\ f_{xy}(x, y) = -e^{x-y-2} & f_{xy}(1, 1) = -e^{-2} \\ f_{yy}(x, y) = e^{x-y-2} & f_{yy}(1, 1) = e^{-2} \end{array}$$

$$f_2(x, y) = e^{-2} + e^{-2}(x-1) - e^{-2}(y-1) + \frac{e^{-2}}{2}(x-1)^2 - e^{-2}(x-1)(y-1) + \frac{e^{-2}}{2}(y-1)^2$$

3) (8 Punkte) Berechnen Sie die Regressionsgerade $y = a + b \cdot x$ zu folgenden Meßwerten und zeichnen Sie Meßwerte und Gerade in ein Koordinatensystem

$$\begin{array}{cccccc} x_i & -2 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ y_i & 7 & 0 & 3 & -1 & -5 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}n &= 5 \\ \sum x_i &= 10 \\ \sum x_i^2 &= 4 + 1 + 16 + 49 = 70 \\ \sum y_i &= 4 \\ \sum x_i y_i &= -14 + 3 - 4 - 35 = -50\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 10 & 70 & -50 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

$$a = -5 - 7b$$

$$5(-5 - 7b) + 10b = 4$$

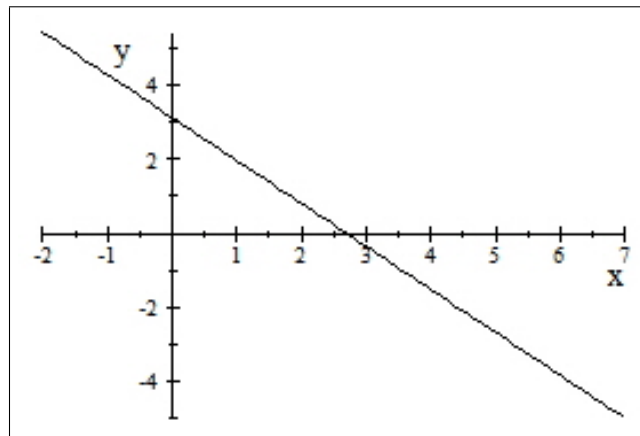
$$-25 - 25b = 4$$

$$b = -\frac{29}{25}$$

$$a = -5 + 7 \cdot \frac{29}{25}$$

$$= \frac{78}{25}$$

$$y = \frac{78}{25} - \frac{29}{25}x$$



4) (10 Punkte) Berechnen Sie mit dem Verfahren der Lagrange'schen Multiplikatoren die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x \cdot (1 - y)$$

unter der Nebenbedingung $2 \cdot x + y = 5$

Lösung:

Lagrange Funktion:

$$L(x, y, \lambda) = x \cdot (1 - y) + \lambda(2 \cdot x + y - 5)$$

Kandidaten:

$$\begin{aligned} L_x &= 1 - y + 2\lambda = 0 \Rightarrow y = 1 + 2\lambda \\ L_y &= -x + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = x \\ L_\lambda &= 2x + y - 5 = 0 \Rightarrow 2\lambda + 1 + 2\lambda - 5 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = 1, x = 1, y = 3 \end{aligned}$$

geränderte Hesse Matrix:

$$L_{xx} = 0, L_{yy} = 0, L_{xy} = -1, g_x = 2, g_y = 1$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det H = -2 - 2 = -4 < 0$$

Also lokales Minimum mit dem Wert

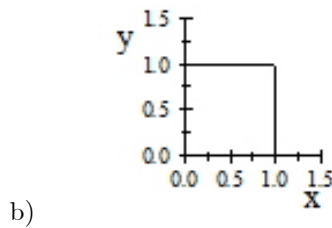
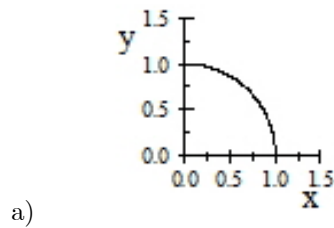
$$f(1, 3) = -2$$

5) (16 Punkte) Berechnen Sie das Volumen der Funktion

$$f(x, y) =$$

$$x^2 + y^2 + 1$$

über die folgenden Integrationsgebiete



Lösung:

a)

$$\begin{aligned}\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^1 (r^2 + 1) r dr d\varphi &= \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^1 r^3 + r dr d\varphi \\&= \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left[\frac{1}{4} r^4 + \frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^1 d\varphi \\&= \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{3}{4} d\varphi = \left[\frac{3}{4} \varphi \right]_{\varphi=0}^{\pi/2} \\&= \frac{3}{8} \pi\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 x^2 + y^2 + 1 dy dx &= \int_{x=0}^1 \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 + y \right]_{y=0}^1 dx \\&= \int_{x=0}^1 x^2 + \frac{4}{3} dx \\&= \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{4}{3} x \right]_{x=0}^1 \\&= \frac{5}{3}\end{aligned}$$

6) (8 Punkte) Bestimmen Sie aus der Exponentialform für komplexe Zahlen ein Additionstheorem für $\cos(\alpha - \beta)$

Lösung:

$$\begin{aligned}\exp(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta) \\ \exp(\alpha - \beta) &= \frac{\exp \alpha}{\exp \beta} = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \beta + i \sin \beta} \\&= \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \beta + i \sin \beta} \frac{\cos \beta - i \sin \beta}{\cos \beta - i \sin \beta} \\&= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta + i \cdot (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)\end{aligned}$$

Damit durch Vergleich der Realteile:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

7) (18 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungen folgender Differentialgleichungen

a) $y'' - 2y' + y = 4x^2 - 15x + 5$

b) $y' = \frac{y}{x} + 2$ mit $y(1) = 2$

c) $y' - 3x^2y = x^3 \cdot e^{x^3}$ mit $y(0) = 7$
 Lösung:

a) Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Superposition:

1. Allg. Lsg. der homogenen DGL

Char. Gleichung

$$\begin{aligned}\alpha^2 - 2\alpha + 1 &= 0 \\ \alpha_{1,2} &= 1 \\ y_h &= (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^x\end{aligned}$$

2. Partik. Lsg

$$\begin{aligned}y_p &= ax^2 + bx + c \\ y'_p &= 2ax + b \\ y''_p &= 2a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2a - 2(2ax + b) + ax^2 + bx + c &= 2a - 4ax - 2b + ax^2 + bx + c \\ &= ax^2 + x \cdot (-4a + b) + (2a - 2b + c) \\ &= 4x^2 - 15x + 5\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned}x^2 &: a = 4 \\ x &: -4a + b = -16 + b = -15 \\ b &= -1 \\ 1 &: 8 - 2 + c = 5 \\ c &= -1 \\ y_p &= 4x^2 + x - 1\end{aligned}$$

3. Allg. Lsg der inhom. DGL

$$\begin{aligned}y &= y_h + y_p \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^x + 4x^2 + x - 1\end{aligned}$$

b) Substitution:

$$\begin{aligned}y' &= \frac{y}{x} + 2 \\ z &= \frac{y}{x} \\ y &= z \cdot x \\ y' &= z'x + z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z'x + z &= z + 2 \\
z' &= \frac{2}{x} \\
z &= 2 \ln(x) + c \\
y &= (2 \ln(x) + c)x
\end{aligned}$$

AWP:

$$2 = y(1) = c$$

Spez. Lsg:

$$y = y = (2 \ln(x) + 2)x$$

c) Variation der Konstanten:

$$y' - 3x^2y = x^3 \cdot e^{x^3}$$

Homogene DGL:

$$\begin{aligned}
y' - 3x^2y &= 0 \\
y &= c \cdot e^{x^3}
\end{aligned}$$

Ansatz

$$\begin{aligned}
y &= c(x) \cdot e^{x^3} \\
y' &= c'(x) \cdot e^{x^3} + 3x^2c(x)e^{x^3} \\
y' - 3x^2y &= c'(x) \cdot e^{x^3} = x^3 \cdot e^{x^3} \\
c'(x) &= x^3 \\
c(x) &= \frac{1}{4}x^4 + c \\
y &= \left(\frac{1}{4}x^4 + c \right) e^{x^3}
\end{aligned}$$

AWP:

$$\begin{aligned}
7 &= y(0) = c \\
y &= \left(\frac{1}{4}x^4 + 7 \right) e^{x^3}
\end{aligned}$$

8) (6 Punkte) Berechnen Sie die Tangentensteigung im Punkt $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ der Funktion

$$e^{2x} + 4 \sin(y) = 1$$

Lösung: Implizites Differenzieren

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= e^{2x} + 4 \sin(y) - 1 \\
F(0, 0) &= 1 - 1 = 0 \checkmark
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_x(x, y) &= 2e^{2x} \Rightarrow F_x(0, 0) = 2 \\
F_y(x, y) &= 4 \cos(y) \Rightarrow F_y(0, 0) = 4 \\
y'(0) &= -\frac{F_x(0, 0)}{F_y(0, 0)} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

9) (8 Punkte) Berechnen Sie alle lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 + 14y$$

Lösung:

1. Kandidaten

$$\begin{aligned}
f_x(x, y) &= 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x \\
f_y(x, y) &= x + 4y + 14 = 0 \\
&\Rightarrow x - 8x + 14 = 0 \\
&\Rightarrow x = 2, y = -4
\end{aligned}$$

2. Hesse Matrix:

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x, y) &= 2 \\
f_{xy}(x, y) &= 1 \\
f_{yy}(x, y) &= 4
\end{aligned}$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\det H &= 8 - 1 = 7 > 0 \Rightarrow \text{lok. Extremum} \\
f_{xx}(2, -4) &= 2 > 0 \Rightarrow \text{lok. Min.} \\
f(-2, 4) &= 4 - 8 + 32 - 56 = -28
\end{aligned}$$

10) (8 Punkte) Berechnen Sie zur u.a. Messung den Korrelationskoeffizienten und interpretieren Sie diesen.

$$\begin{array}{cccccc}
x_i & -2 & 0 & 1 & 4 & 7 \\
y_i & 7 & 1 & 3 & -1 & -5
\end{array}$$

Lösung:

Es ist

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= 2 \\
\bar{y} &= 1
\end{aligned}$$

$x_i - \bar{x}$	-4	-2	-1	2	5
$y_i - \bar{y}$	6	0	2	-2	-6
$(x_i - \bar{x})^2$	16	4	1	4	25
$(y_i - \bar{y})^2$	36	0	4	4	36
$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	-24	0	-2	-4	-30

$$r_{xy} = \frac{-60}{\sqrt{50 \cdot 80}} = \frac{-6}{\sqrt{40}} = -0,949$$

und damit eine starke negative Korrelation.