

Prof. C. Schelthoff - Punkte 56 zzgl bis zu 4 Punkten für die Ausarbeitung, falls diese ausführlich die Lösungswege beschreibt sowie Schritte, Beschreibungen und Graphen vollständig und ordentlich sind.

Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner, Selbsterstellte Zusammenfassung ohne Zahlenbeispiele - Keine Bücher oder Vorlesungsmanuskripte

1	4	
2	4	
3	6	
4	6	
5	6	
6	6	
7	6	
8	9	
9	5	
10	4	
	Summe	

Datum:

Name:

Matrikelnummer:

Studienrichtung: (Chemie/Bio)

Unterschrift:

Bitte beachten:

1. Schreiben Sie die Lösungen in das zusammengeheftete Deck. In Ausnahmefällen können Sie zusätzliche Blätter verwenden, die Sie alle mit Namen und Matrikelnummer versehen.

2. Beschreiben Sie ihren Lösungsweg hinreichend und machen Sie auch Zwischenresultate kenntlich. Wichtige Ergebnisse unterstreichen Sie bitte doppelt.

3. Erstellen Sie Skizzen sorgfältig und denken Sie dabei auch an Achsenbeschriftungen.
4. Sofern gerundet werden muss, verwenden Sie bitte stets 3 Dezimale.

1) (4 Punkte) Geg. sind die komplexen Zahlen $z_1 = 3 - 2i$ und $z_2 = 2 - i$

a) Zeichnen Sie die z_1 und z_2 in ein Koordinatensystem und berechnen Sie $z_3 = z_1 \cdot z_2$, $z_4 = \frac{z_2}{z_1}$, $|z_1|$, $|z_2|$

Lösung: Zeichnung 2P

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (3 - 2i) \cdot (2 - i) = 4 - 7i \\ \frac{z_2}{z_1} &= \frac{2 - i}{3 - 2i} = \frac{2 - i}{3 - 2i} \cdot \frac{3 + 2i}{3 + 2i} = \frac{8 + i}{13} = \frac{8}{13} + \frac{1}{13}i \\ |z_1| &= \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \\ |z_2| &= \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

2) (4 Punkte) Berechnen Sie alle Lösungen in der kartesischen Form von

$$z^3 = -8$$

Lösung:

1,5P:

$$-8 = 8 \cdot e^{i \cdot 180^0}$$

$$\hat{r} = 8$$

$$\hat{\varphi} = 180^0$$

$$n = 3$$

$$r = \sqrt[3]{8} = 2$$

2,5P:

$$\varphi_0 = \frac{180^0 + 0 \cdot 360^0}{3} = 60^0$$

$$\begin{aligned} z_0 &= 2e^{i \cdot 60^0} = 2 \cos 60^0 + i \cdot 2 \sin 60^0 \\ &= 1 + \sqrt{3}i \end{aligned}$$

$$\varphi_1 = \frac{180^0 + 1 \cdot 360^0}{3} = 180^0$$

$$\begin{aligned} z_1 &= 2e^{i \cdot 180^0} = 2 \cos 180^0 + i \cdot 2 \sin 180^0 \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\varphi_2 = \frac{180^0 + 2 \cdot 360^0}{3} = 300^0$$

$$\begin{aligned} z_2 &= 2e^{i \cdot 300^0} = 2 \cos 300^0 + i \cdot 2 \sin 300^0 \\ &= 1 - \sqrt{3}i \end{aligned}$$

3) (6 Punkte) Berechnen Sie zur Funktion $f(x, y) = x^2 \cdot e^{y-1}$ die Taylorentwicklung bis zum quadratischen Term in $x_0 = 2$ und $y_0 = 1$.

Lösung

4P:

$f(x, y) = x^2 \cdot e^{y-1}$	$f(2, 1) = 4$
$f_x(x, y) = 2x \cdot e^{y-1}$	$f_x(2, 1) = 4$
$f_y(x, y) = x^2 \cdot e^{y-1}$	$f_y(2, 1) = 4$
$f_{xx}(x, y) = 2 \cdot e^{y-1}$	$f_{xx}(2, 1) = 2$
$f_{xy}(x, y) = 2x \cdot e^{y-1}$	$f_{xy}(2, 1) = 4$
$f_{yy}(x, y) = x^2 \cdot e^{y-1}$	$f_{yy}(2, 1) = 4$

2P:

$$f_2(x, y) = 4 + 4 \cdot (x - 2) + 4 \cdot (y - 1) + (x - 2)^2 + 4(x - 2)(y - 1) + 2(y - 1)^2$$

4) (6 Punkte) Berechnen Sie die Regressionsgerade $y = a + b \cdot x$ zu folgenden Meßwerten und zeichnen Sie Meßwerte und Gerade in ein Koordinatensystem

$$\begin{array}{rcccc} x_i & -1 & 0 & 1 & 3 \\ y_i & 3 & 1 & 0 & -2 \end{array}$$

2P

$$n = 4$$

$$\sum x_i = 3$$

$$\sum y_i = 2$$

$$\sum x_i^2 = 1 + 1 + 9 = 11$$

$$\sum x_i y_i = -3 - 6 = -9$$

2P:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{7}{5}$$

$$b = -\frac{6}{5}$$

$$y = \frac{7}{5} - \frac{6}{5}x$$

Skizze 2P

5) (6 Punkte) Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = x + y$$

auf dem Einheitskreis, also unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 1$$

auf lokale Extrema

Lösung:

(3P)

Lagrange Funktion

$$L(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Notwendig:

$$L_x = 1 + 2\lambda x = 0 \implies \lambda = -\frac{1}{2x}$$

$$L_y = 1 + 2\lambda y = 0 \implies \lambda = -\frac{1}{2y}$$

$$L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Aus den ersten beiden ergibt sich

$$x = y$$

und damit

$$2x^2 = 1$$

$$x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lambda = \pm \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

Kandidaten

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(3P)

Hesse Matrix

$$L_{xx} = 2\lambda$$

$$L_{xy} = 0$$

$$L_{yy} = 2\lambda$$

$$g_x = 2x$$

$$g_y = 2y$$

$$H = \begin{bmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det H = -8x^2\lambda - 8y^2\lambda = -8(x^2 + y^2)\lambda$$

Kand. 1:

$$\det H = -8 \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} > 0$$

lok.Max

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Kand. 2:

$$\det H = -8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} < 0$$

lok.Min

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

6) (6 Punkte) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x, y) = x^2 y$$

im Punkt

$$x_0 = 2, y_0 = 1$$

in Richtung des Vektors

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

(6P)

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix} \\ \operatorname{grad} f(2, 1) &= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \vec{v} &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ D_v(f) &= \operatorname{grad} f(2, 1) \cdot \vec{v} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{28}{5} = 5,6 \end{aligned}$$

7) (6 Punkte) Berechnen Sie das Volumen der Funktion $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ über den Ring zwischen den Kreisen mit Radius 1 und 2 um den Ursprung. Fertigen Sie zunächst eine Skizze des Integrationsgebietes an.

Skizze 2P, rest 4P

$$\begin{aligned} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=1}^2 \frac{1}{r^2} r dr d\varphi &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=1}^2 \frac{1}{r} dr d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \ln(2) d\varphi \\ &= [\ln(2) \cdot \varphi]_{\varphi=0}^{2\pi} = 2\pi \ln(2) \end{aligned}$$

8) (9 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungen folgender Differentialgleichungen

a) $y'' - 6y' + 9y = 5 \cdot e^{2x}$

b) $y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{x}$ mit $y(1) = 2$ durch Substitution mit $z = \frac{y}{x}$

c) $y' + 3y = x^2 - 1$

Lösung:

a) (3P) Lin. DGL mit konst. Koeffizienten (Superpositionsprinzip)

Allgem. Lösung der hom. DGL:

char. Gleichung

$$\begin{aligned}\alpha^2 - 6\alpha + 9 &= 0 \\ \alpha_{1,2} &= 3 \\ y_h &= (\lambda_1 + \lambda_2 x) \cdot e^{3x}\end{aligned}$$

2 ist keine Nullstelle des char. Polynoms.

Partik. Lösung

$$\begin{aligned}y_p &= Ae^{2x} \\ y'_p &= 2Ae^{2x} \\ y''_p &= 4Ae^{2x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4Ae^{2x} - 12Ae^{2x} + 9Ae^{2x} &= Ae^{2x} = 5e^{2x} \\ A &= 5 \\ y_p &= 5e^{2x}\end{aligned}$$

Allgem. Lsg der inhom Dgl

$$\begin{aligned}y &= y_h + y_p \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 x) \cdot e^{3x} + 5e^{2x}\end{aligned}$$

b) (3P)

$$\begin{aligned}&\text{Substitution} \\ z &= \frac{y}{x} \\ y &= z \cdot x \\ y' &= z'x + z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z'x + z &= z - \frac{1}{x} \\
z'x &= -\frac{1}{x} \\
z' &= -\frac{1}{x^2} \\
z &= \frac{1}{x} + c \\
y &= 1 + cx
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
y(1) &= 2 \\
2 &= 1 + c \\
c &= 1
\end{aligned}$$

und damit als Lsg des AWP

$$y = 1 + x$$

c) (3P)

$$y' + 3y = x^2 - 1$$

Lin. DGL mit konst. Koeffizienten (Superpositionsprinzip)
Allgem. Lösung der hom. DGL:

$$y_h = c \cdot e^{-3x}$$

Partik. Lösung

$$\begin{aligned}
y_p &= ax^2 + bx + c \\
y'_p &= 2ax + b \\
y'_p + 3y_p &= 2ax + b + 3ax^2 + 3bx + 3c \\
&= 3ax^2 + (2a + 3b)x + (b + 3c) = x^2 - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{3} \\
\frac{2}{3} + 3b &= 0 \implies b = -\frac{2}{9} \\
-\frac{2}{9} + 3c &= -1 \implies c = -\frac{7}{27}
\end{aligned}$$

$$y_p = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{7}{27}$$

Allgem. Lsg der inhom. DGL

$$y = y_h + y_p = c \cdot e^{-3x} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{7}{27}$$

9) (5 Punkte) Gegeben Sei die Messreihe

$$\begin{array}{ccccc} x_i & -1 & 0 & 1 & 3 \\ y_i & 3 & 1 & 0 & -2 \end{array}$$

Wie gross ist der Korrelationskoeffizient der beiden Messungen? Interpretieren Sie das Ergebnis !

$$r_{xy} = \frac{(\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}))}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \cdot \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2}}$$

(1P)

Es ist

$$\begin{array}{lcl} \bar{x} & = & \frac{3}{4} \\ \bar{y} & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

(2P)

x-xq	y-yq	(x-xq)*(y-yq)	(x-xq)^2	(y-yq)^2
-1,75	2,5	-4,375	3,0625	6,25
-0,75	0,5	-0,375	0,5625	0,25
0,25	-0,5	-0,125	0,0625	0,25
2,25	-2,5	-5,625	5,0625	6,25

(2P)

$$\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = -10,5$$

$$\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 = 8,75$$

$$\sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2 = 13$$

$$r_{xy} = \frac{-10,5}{\sqrt{8,75 \cdot 13}} = -0,985$$

stark negativ korreliert.

10) (4 Punkte) Berechnen Sie die Lösung der DGL

$$y'(x) = y(x) \cdot x + 1$$

mit $y(1) = 1$ numerisch mit $h=0,2$ und ermitteln Sie somit eine Näherung für $y(1,8)$

Lösung: 4P

i	xi	yi	f(xi,yi)	y(i+1)
0	1	1	2	1,4
1	1,2	1,4	2,68	1,936
2	1,4	1,936	3,71	2,678
3	1,6	2,678	5,285	3,735
4	1,8	3,735		

$$y(1,8) = 3,735$$