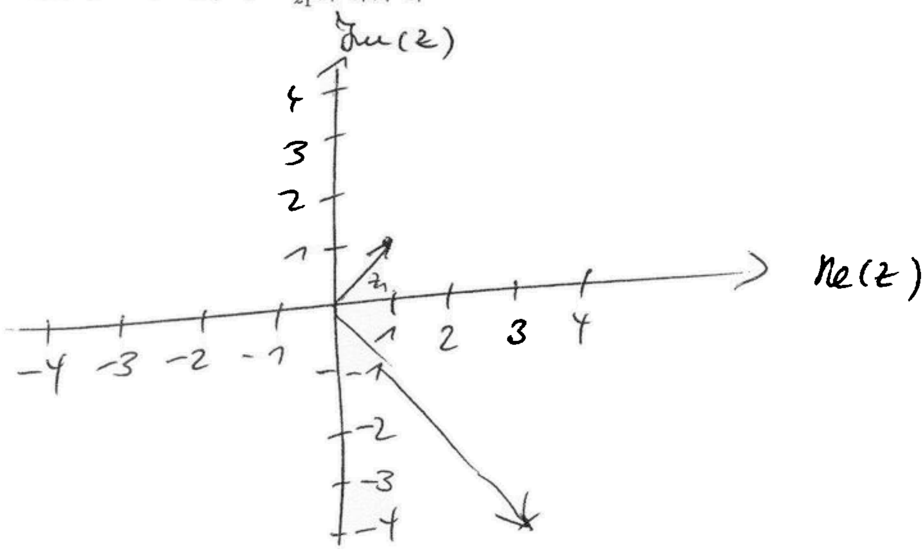
1) (4 Punkte) Geg. sind die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 3 - 4i$

a) Zeichnen Sie die z_1 und z_2 in ein Koordinatensystem und berechnen Sie $z_3 = z_1 \cdot z_2$, $z_4 = \frac{z_2}{z_1}, |z_1|, |z_2|$



$z_3 = (1+i)(3-4i) = 3 + 4 + 3i - 4i = 7 - i$

$z_4 = \frac{(3-4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-4 \quad -7i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$

$|z_1| = \sqrt{2}$

$|z_2| = \sqrt{9+16} = 5$

2) (4 Punkte) Berechnen Sie alle Lösungen in der kartesischen Form von

$$z^3 = -8i$$

$\hat{r} = 8 \qquad \hat{\varphi} = 270^\circ$

$r = \sqrt[3]{8} = 2$

z_0: $\quad \varphi_0 = \frac{270^\circ}{3} = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad z_0 = 2e^{i \cdot 90^\circ} = 2i$

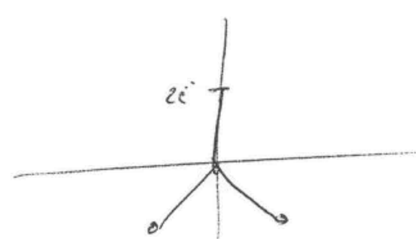
$z_1 \quad \varphi_1 = \frac{270^\circ + 360^\circ}{3} = 210^\circ \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2e^{i \cdot 210^\circ}$

$= -1{,}732 - 2\frac{1}{2} i$

$= -1{,}732 - i$

$z_2 \quad \varphi_2 = \frac{270^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{3} = 330^\circ \quad \Rightarrow \quad z_2 = 2 \cdot e^{i \cdot 330}$

$= 1{,}732 - i$



3) (6 Punkte) Berechnen Sie zur Funktion $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ die Taylorentwicklung bis zum quadratischen Term in $x_0 = 1$ und $y_0 = 1$.

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2) \qquad f(1,1) = \ln(2)$$

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} \qquad f_x(1,1) = \frac{2}{2} = 1$$

$$f_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} \qquad f_y(1,1) = 1$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{(x^2+y^2)\cdot 2 - 2x\,\cancel{(x^2+y^2)}\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_{xx}(1,1) = \frac{4-4}{4} = 0$$

$$f_{xy}(x,y) = 2x\cdot 2y \;\frac{-1}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_{xy}(1,1) = -1$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{(x^2+y^2)\cdot 2 - 2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_{yy}(1,1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f_2(x,y) = \ln(2) + (x-1) + (y-1)$$
$$+ (-1)\cdot(x-1)(y-1)$$

4) (6 Punkte) Berechnen Sie die Regressionsgerade $y = a + b \cdot x$ zu folgenden Meßwerten und zeichnen Sie Meßwerte und Gerade in ein Koordinatensystem

x_i	-2	0	2	4
y_i	4	0	1	-5

$\Rightarrow$ $n = 4$

$\sum x_i = 4$

$\sum y_i = 0$

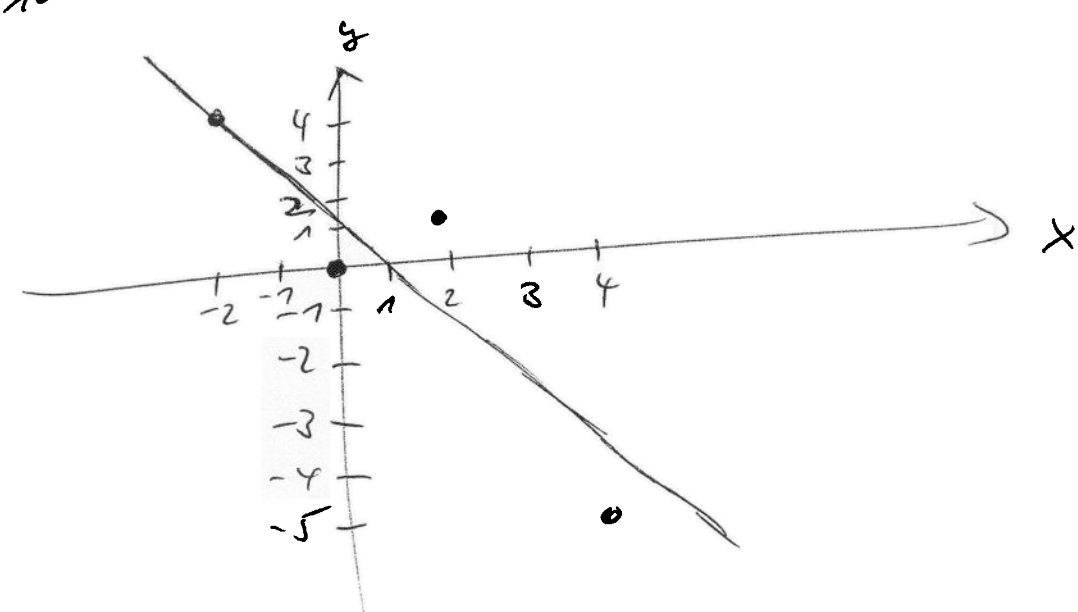
$\sum x_i^2 = 4+4+16 = 24$

$\sum x_i y_i = -8+2-20 = -26$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 24 & -26 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 12 & -13 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -13 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ $b = -\frac{13}{10} = -1{,}3$ $\rightarrow$ $a = 1{,}3$ $\Rightarrow$ $y = 1{,}3 - 1{,}3x$



5) (6 Punkte) Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$$

auf lokale Extrema

1. Kandidaten

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2+1} \qquad x=0$$

$$\Rightarrow$$

$$f_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2+1} \qquad y=0$$

2. Hesse Matrix

$$f_{xx}(x,y) = \frac{2\cdot(x^2+y^2+1) - 2x\cdot 2x}{(x^2+y^2+1)^2} \Rightarrow f_{xx}(0,0) = 2$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{2\cdot(x^2+y^2+1) - 2y\cdot 2y}{(x^2+y^2+1)^2} \Rightarrow f_{yy}(0,0) = 2$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{-2y\cdot 2x}{(x^2+y^2+1)^2} \Rightarrow f_{xy}(0,0) = 0$$

$$\Rightarrow H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H = 4 > 0 \Rightarrow \text{lok. Extremum}$$

$$f_{xx}(0,0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{lok. Min.}$$

$$f(0,0) = 1$$

6) (6 Punkte) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x,y) = e^{x-y}$$

im Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

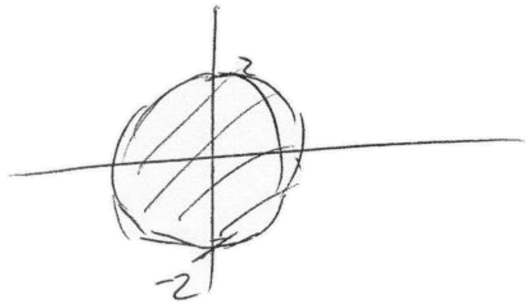
in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} e^{x-y} \\ -e^{x-y} \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{grad} f(2,2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_v(f) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{1}{5}$$

7) (6 Punkte) Berechnen Sie das Volumen der Funktion $f(x,y) = (x^2+y^2+1)^2$ über den Ring zwischen den Kreisen mit Radius 0 und 2 um den Ursprung. Fertigen Sie zunächst eine Skizze des Integrationsgebietes an.



$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}(r^2+1)^2\, r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}(r^4+2r^2+1)\,r\,dr\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} r^5+2r^3+r\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left.\frac{r^6}{6}+\frac{r^4}{2}+\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{2} d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{32}{3}+8+2\;d\varphi$$

$$= \left.\frac{62}{3}\varphi\right]_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{124}{3}\pi$$

8) **(9 Punkte)** Bestimmen Sie die Lösungen $y(x)$ folgender Differentialgleichungen

a) $y'' - 6y' + 9y = 5 \cdot e^{2x}$

b) $y' = y \cdot (\frac{1}{x} + x)$ mit $y(1) = \sqrt{e}$

c) $y' - 2y = -13\sin(3x)$

a) Konst. Koeff. lineare Gl. $\alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$

$\Rightarrow y_h = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{3x}$

y_p Ansatz $y_p = A \cdot e^{2x}$ $y_p' = 2Ae^{2x}$ $y_p'' = 4Ae^{2x}$

$\Rightarrow 4A - 6 \cdot 2A + 9A \stackrel{!}{=} 5$

$A = 5 \Rightarrow y_p = 5e^{2x}$

$\rightarrow y = y_h + y_p = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{3x} + 5e^{2x}$

b) Trennung der Var. $\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} + x \, dx$

$\ln y = \ln(x) + \frac{x^2}{2} + \tilde{c}$

$y = c \cdot e^{\ln(x) + \frac{x^2}{2}}$

$\sqrt{e} = y(1) = c^{\frac{1}{2}} \Rightarrow c = 1$

$\Rightarrow y = e^{\ln(x) + \frac{x^2}{2}}$

c) konst. Koeff.

y_h: $y' - 2y = 0 \Rightarrow y_h = c \cdot e^{2x}$

y_p Ansatz $y_p = A \sin(3x) + B \cos(3x)$

$y_p' = 3A \cos(3x) - 3B \sin(3x)$

$\Rightarrow y_p' - 2y_p = 3A \cos(3x) - 2B \cos(3x)$
$- 3B \sin(3x) - 2A \sin(3x) \stackrel{!}{=} -13 \sin(3x)$

$3A - 2B = 0 \Rightarrow A = \frac{2}{3} B$

$-3B - 2 \cdot \frac{2}{3} B = -13$

$-\frac{13}{3} B = -13 \Rightarrow B = 3 \Rightarrow A = 2$

$\Rightarrow y_p = 2 \sin(3x) + 3 \cos(3x)$

$\Rightarrow y = y_h + y_p = c \cdot e^{2x} + 2 \sin(3x) + 3 \cos(3x)$

9) (5 Punkte) Gegeben Sei die Messreihe

x_k	-2	0	2	4
y_k	4	0	1	-5

Wie gross ist der Korrelationskoeffzient der beiden Messungen? Interpretieren Sie das Ergebnis !

x_k	y_k	$(x_k-\bar{x})^2$	$(y_k-\bar{y})^2$	$(x_k-\bar{x})(y_k-\bar{y})$
-2	4	9	16	-12
0	0	1	0	0
2	1	1	1	1
4	-5	9	25	-15
$\bar{x} = 1$	$\bar{y} = 0$	$\Sigma: 20$	$\Sigma: 42$	$\Sigma: -26$

$$\delta = \cancel{\sqrt{20 \cdot 42}} \quad \frac{-26}{\sqrt{20 \cdot 42}} = -0{,}897$$

Stark negativ korrelliert

10) (4 Punkte) Berechnen Sie die Lösung der DGL

$$y'(x) = y(x) \cdot x + 1$$

mit $y(1) = 1$ numerisch mit h=0,2 und ermitteln Sie somit eine Näherung für $y(1,8)$

i	x_i	y_i	$h \cdot (y \cdot x + 1)$ $h \cdot f(x_i, y_i)$	$y_{i+1} = y_i + h \cdot f$	
0	1	1	0,4	1,4	
1	1,2	1,4	0,536	1,936	
2	1,4	1,936	~~0,964~~ 0,742	~~3,464~~	2,678
3	1,6	~~3,464~~ 2,678	~~2,225~~ 1,057	~~5,425~~	3,735
4	1,8	3,735			

$\Rightarrow \; y(1,8) \approx \cancel{5,425}\ 3,735$