Mathematik für Biologen und Chemiker

Prof. Schelthoff - Übungen Mathe 2

Fortsetzung der komplexen Zahlen :
9. Radizieren und Potenzen

a) Berechnen Sie $(1+i)^{20}$ und geben Sie das Resultat als Polarkoordinaten und kartesische Koordinaten an.
b) Berechnen Sie alle Lösungen von

i) $z^3 = \sqrt{32} - \sqrt{32} \cdot i$

ii) $z^4 = -1$

iii) $z^2 = -5 + 12i$

10. Additionstheoreme

Leiten Sie die Additionstheoreme für $\cos(3\varphi)$ und $\sin(3\varphi)$ her.

11. Schnittfunktionen

Bestimmen Sie zu $f(x, y) = x^2 \cdot \sin(y)$ die Schnittfunktionen
a) $y = \frac{\pi}{2}$ b) $y = 3\frac{\pi}{2}$ c) $x = 2$

12. Gradient
Bestimmen Sie $grad(f)$ für

$$f_1(x, y) = x \cdot e^y$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \cos(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$$

$$f_3(x_{1,\ldots}, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

13. Richtungsableitung: Berechnen Sie die Richtungsableitung $D_v(f(x_0))$ für $\vec{w} = (1, \ldots, 1)$von f_1, f_2 und f_3 aus Aufg. 12 im Punkt $x_0 = (0, \ldots, 0)$.

14. Part. Ableitungen höherer Ordnung: Bestimmen Sie alle part. Ableitungen 3. Ordnung im Punkt $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ von

$$f(x,y) = e^y \cdot \sin(x) + \sin(y) + 2$$

15. Berechnen Sie die Tangentialebene $f_1(x,y)$ zu
a) $f(x,y) = e^y \cdot \sin(x) + \sin(y) + 2$ im Punkt $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$
b) $f(x,y) = e^x + x^2 e^y + 1$ im Punkt $x_0 = 1$ und $y_0 = 1$

. 16. Berechnen Sie die Taylorformel bis zum quadratischen Glied
a) um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ von

$$f(x,y) = e^y \cdot \sin(x) + \sin(y) + 2$$

b) um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ und $y_0 = 1$ von

$$f(x,y) = e^x + x^2 e^y + 1$$

17. Wie lautet das vollständige Differential dieser Funktionen?

18. Wie ändert sich der Funktionswert der Tangentialebene zu obigen Funktionen im Entwicklungspunkt, wenn Sie x um 0.1 verkleinern und y um 0.1 vergrößern? Wie ist der exakte Funktionswert der Funktion selber an dieser Stelle?

19. Welches ist die Richtung des steilsten Anstieges der Funktionen im Entwicklungspunkt?

20. Berechnen Sie $y'(x)$ zu den implizit gegebenen Funktionen an den vorgegebenen Stellen. Sind diese Stellen zulässig?

a) $x^2 + 2 \cdot y^2 = 5$ in $x_0 = -1, \quad y_0 = \sqrt{2}$

b) $\sin(y) + cos(x^2) = 1$ in $x_0 = 0, \quad y_0 = 0$

21. Berechnen Sie alle lokalen Extremwerte der folgenden Funktionen. Welchen Wert nehmen die Funktionen an dieser Stelle an?

$$a) \quad f(x,y) = e^{x^2+y^2}$$

$$b) \quad f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 2y^2 - 7x - 7y + 5$$

$$c) \quad f(x,y) = (x^2-1)\cdot(y^2-1)$$

22. **a)** Sie vermuten bei der unten stehenden Stichprobe einen linearen Zusammenhang zwischen x und y. Berechnen Sie die Regressionsgerade und stellen Sie Meßwerte und Gerade grafisch dar.

i (Meßwert Nr.)	x_i	y_i
1	2	4
2	3	5
3	6	8
4	9	10

b) Sie vermuten bei der unten stehenden Stichprobe einen Zusammenhang zwischen x und y gemäß

$$y = a + b \cdot \sqrt{x}$$

i (Meßwert Nr.)	x_i	y_i
1	1	3
2	4	5
3	9	7
4	16	10

23. Berechnen Sie die Extremwerte von

$$f(x,y) = 2x^2 - y^2$$

unter der Nebenbedingung $2x^2 + 2y = 20$.

Welchen Wert nimmt die Funktionen an diesen Stellen an? Entscheiden Sie, ob dies Minimum oder Maximum ist.

24. Sie möchten aus einem Stück Blech eine zylindrische Dose möglichst großen Volumens basteln.

Mit Deckel und Boden! Ihnen stehen dabei $2400\cdot\pi$ cm^2 Blech zur Verfügung. Wie muß diese Dose konstruiert werden, d.h. welchen Radius und welche Höhe hat diese Dose? Wie groß ist das optimale Volumen, daß Sie mit diesen $2400\cdot\pi$ cm^2 erzielen können?

Tip: Berechnen Sie zunächst das Volumen V(r,h) einer Dose mit Radius r und Höhe h, dann den Verbrauch für den Mantel und dann für Deckel und Boden und daraus den Gesamtverbrauch.

25. Berechen Sie das Integral für

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y}$$

wobei x alle Werte von 0 bis 1 und y von 1 bis 2 annehmen soll.

26.

a) Gegeben sei ein dreieckiges Gebiet durch die Punkte (0,0) (2,2) und (2,-2) (jeweils (x,y)). Beschreiben Sie das Gebiet zunächst durch eine lineare Funktion. Wie lautet das Volumen der Funktion

$$f(x,y) = x^2 + x \cdot y^3$$

über dieser Fläche?

b) Wie groß ist die Fläche, die von $f(x) = x$ und $f(x) = \sqrt{x}$ eingeschlossen wird? Wie lautet das Volumen von

$$f(x,y) = xy$$

über dieser Fläche?

27. Wie lauten die Schwerpunktskoordinaten der Fläche zwischen $f(x) = x$ und $f(x) = x^4$?

28. Berechnen Sie

$\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dydx$ durch Transformation auf Polarkoordinaten

29. Integrieren Sie über den Halbkreis, wo y positiv ist, mit Radius 2 die Funktion $e^{x^2+y^2}$ direkt in Polarkoordinaten.

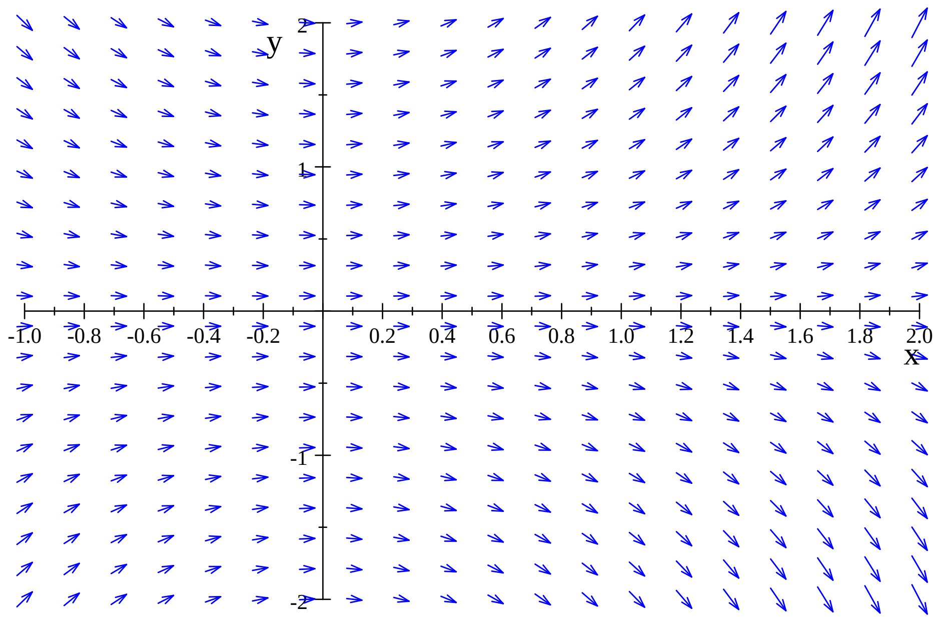
30. Berechnen Sie

a) $\int_{x=1}^{2} \int_{y=0}^{2} \int_{z=1}^{3} \quad x^2 - y \cdot z \; dz \; dy \; dx$

b) $\int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{1-x} \int_{z=0}^{1-x-y} \quad x \; dz \; dy \; dx$

c) $\int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{z=0}^{2} \sin(x^2+y^2)\cdot z \; dz\; dy\; dx$

31. Gegeben sei das folgende Gradientenfeld zu $y' = f(x,y) = x \cdot y$. Bestimmen Sie grafisch die Lösungen des AWP zu a) y(-1)= 1 b) y(0)=1 c) y(0)=-1



32.Zeigen Sie: $y(x) = x^2 + 1$ ist Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$y' + y = (x+1)^2 \qquad mit \;\; y(-1) = 2$$

33. Raten Sie eine Lösung der folgenden Differentialgleichung (ohne Rechnung):

a) $y' = e^x + 1$ b) $y' = x^2 + x + 3$
c) $y' = xy$ d) $y'' = -y$

34. Bestimmen Sie die Typen der folgenden DGL'en und berechnen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

a) $y' = y^2 \cdot (x^2+1)$ *mit* $y(0) = -\dfrac{1}{2}$

b) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ *mit* $y(1) = 8$

c) $y' = (2x+2y+1)^2$ *mit* $y(-\frac{1}{2}) = 0$

d) $y' = \sin(x) \cdot y$ (Allgem. Lösung)

e) $y' - \sin(x) \cdot y = e^{-\cos(x)}$ *mit* $y(0) = \dfrac{1}{e}$

35. Finden Sie heraus welcher Lösungstyp angebracht ist und lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen

1) $y' = \dfrac{x}{e^y}$ mit $y(0) = 0$

2) $y' \cdot x = y + 2x$

3) $y' - 3y = e^{2x}$ mit $y(0) = 0$

4) $y' \cdot y = x$

5) $y' = \dfrac{\cos(x)}{y}$

6) $y' = (2x+2y+3)^2$ mit $y(-\frac{3}{2}) = 0$

7) $y' + y = 10 \cdot \sin(2x)$

8) $y' - 2y = e^{2x}$

9) $y' + 3y = 3x^3 + 3x^2 + 3x + 4$ mit $y(0) = 5$

10) $y' = 2x \cdot (y + e^{x^2})$ mit $y(0) = 5$

11) $y' = y + 1$

12) $y' = y^2 + 1$

36. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen

a) $y'' - 4y' - 5y = -5x^2 - 13x - 13$

b) $y'' + 6y' + 9y = 8e^{-x}$

c) $y'' - 2y' + 2y = e^{2x}$

d) $y'' - 2y' = 3e^{2x}$

37. Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung $y' = x + y + 1$ mit der Anfangsbedingung $y(1) = 1$ an der Stelle $x = 1.5$ näherungsweise mit dem Streckenzugverfahren von Euler. Verwenden Sie

dabei $h = 0,1$.

38. Lösen Sie das AWP

$$\begin{aligned} y'(t) &= k \cdot y(t) - a \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

mit möglichst vielen der voranstehenden Verfahren und numerisch mit h=0,2 zur Berechnung des Wertes $y(1)$. Vergleichen Sie auch mit dem exakten Wert

aus einer der zuvor berechneten (identischen) Lösungen.

39. Zusatzaufgabe: Wir betrachten das System mit . $c_a(0) = A_0, c_b(0) = B_0, c_c(0) = C_0$. Weiterhin gilt $k_2 \neq k_1 + k_3, k_2 \neq k_3$

$$\begin{aligned} c_a'(t) &= \frac{dc_a}{dt} = -k_1 \cdot c_a(t) - k_3 \cdot c_a(t) \\ c_b'(t) &= \frac{dc_b}{dt} = k_1 \cdot c_a(t) - k_2 \cdot c_b(t) \\ c_c'(t) &= \frac{dc_c}{dt} = k_3 \cdot c_a(t) + k_2 \cdot c_b(t) \end{aligned}$$

Warum ist dies ein Erhaltungssatz? (Wie ist die Summe alle Änderungen)

Lösen Sie zunächst die erste Differentialgleichung durch Trennung der Variablen. Durch Einsetzen von $c_a(t)$ in die zweite erhalten Sie eine neue gewöhnliche Differentialgleichung, welche Sie als linear inhomogene lösen können. Einsetzen von $c_a(t)$ und $c_b(t)$ in die dritte ergibt eine Aussage über $c_c'(t)$, welche Sie durch einen Integrationsschritt lösen können. Lösen Sie bitte $c_a(t)$ und $c_b(t)$ allgemein und dann für $k_1 = k_3 = \frac{1}{3}$,$k_2 = 1$ und $A_0 = B_0 = C_0 = 0,5$.Für diesen Spezialfall berechnen Sie auch bitte $c_c(t)$ durch Integration.

Die allgemeine Berechnung $c_c(t)$ können Sie zur Übung (mathematisch einfach, aber sehr schreibaufwendig) zu Hause versuchen.

Statistik

Wir betrachten die Messreihe

x_k	y_k
15	17
12	20
19	33
17	38
18	37
21	44
28	51
25	56
30	69
32	70

1. Berechnen Sie für die beiden Urlisten
a) das arithmetische Mittel der beiden Größen
b) die Stichprobenvarianz
c) Das 75%-Quantil Q(0,75)
d) die Spannweite
e) Den mittleren 50%-Bereich der Werte, also Q(0,75)-Q(0,25)

2. Wir vermuten einen linearen Zusammenhang der Größen. Ist dies wirklich so? Wie groß ist der Korrelationskoeffizient? Was sagt dieser aus?

3. Was ist der Unterschied zwischen qualitativen und quantitativen Merkmalen? Welche der Größen Median - Modalwert - arithm. Mittel kann bei qualitativen Merkmalen noch bestimmt werden?

4. Warum geht die Regressionsgerade immer durch den Punkt $(\overline{x}, \overline{y})$? Dividieren Sie dazu die erste Zeile (Gleichung) der Bestimmung der Regressionsgerade durch n und interpretieren Sie das Ergebnis.

Zusätzliche Aufgaben:

Z1: Welcher Punkt auf der Ellipse, die durch $x^2 + 2y^2 = 1$ beschrieben ist, hat den grössten Funktionswert zu $f(x,y) = -2x - 4y + 1$?

Vergessen Sie nun die Funktion $f(x,y)$... Wie gross ist in diesem Punkt der Ellipse (als Kontur in der x-y-Ebene) die Steigung?

Z2: Die Messreihe $\begin{array}{ccccc} x & 0 & 1 & 4 & 9 \\ y & 1 & 4 & 12 & 15 \end{array}$ soll durch eine Approximation

$y = a + b \cdot \sqrt{x}$ angenähert werden.

Wie lauten die nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestimmten optimalen Parameter a und b?

Z3: Die Gleichung des gebremsten Wachstums habe eine Wachstumsrate, die mit der Zeit abfällt gemäß

$$y' = \frac{1}{t} \cdot y(t) - a$$

Wie lautet der zeitliche Verlauf bei gegebener Startpopulation $y(1) = 100$?

Z4: Zur DGL $y' = y + x$ mit $y(0) = 1$ ist der Funktionswert an der Stelle x=1 gesucht.

Bestimmen Sie diesen exakt (Integrieren und Einsetzen) und numerisch mit h=0,2 und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Z5: Wie lautet die Steigung der Funktion $f(x, y) = x^2 y$ im Punkt

$x_0 = 1, y_0 = 2$ entlang der Richtung $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$?

Z6: Welche Funktion durch den Punkt $x_0 = 1, y_0 = 2$ erfüllt, dass ihr Verhältnis von Funktion zur Ableitung gerade die Normalparabel $g(x) = x^2$ ergibt?

Machen Sie auch die Probe fü die allgemeine Lösung der DGL.