Zusätzliche Aufgaben:

Z1: Welcher Punkt auf der Ellipse, die durch $x^2 + 2y^2 = 1$ beschrieben ist, hat den grössten Funktionswert zu $f(x, y) = -2x - 4y + 1$?

Vergessen Sie nun die Funktion $f(x, y)$... Wie gross ist in diesem Punkt der Ellipse (als Kontur in der x-y-Ebene) die Steigung?

Z2: Die Messreihe $\begin{array}{ccccc} x & 0 & 1 & 4 & 9 \\ y & 1 & 4 & 12 & 15 \end{array}$ soll durch eine Approximation

$y = a + b \cdot \sqrt{x}$ angenähert werden.

Wie lauten die nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestimmten optimalen Parameter a und b?

Z3: Die Gleichung des gebremsten Wachstums habe eine Wachstumsrate, die mit der Zeit abfällt gemäß

$$y' = \frac{1}{t} \cdot y(t) - a$$

Wie lautet der zeitliche Verlauf bei gegebener Startpopulation $y(1) = 100$?

Z4: Zur DGL $y' = y + x$ mit $y(0) = 1$ ist der Funktionswert an der Stelle x=1 gesucht.
Bestimmen Sie diesen exakt (Integrieren und Einsetzen) und numerisch mit h=0,2 und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Z5: Wie lautet die Steigung der Funktion $f(x, y) = x^2 y$ im Punkt

$x_0 = 1, y_0 = 2$ entlang der Richtung $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$?

Z6: Welche Funktion durch den Punkt $x_0 = 1, y_0 = 2$ erfüllt, dass ihr Verhältnis von Funktion zur Ableitung gerade die Normalparabel $g(x) = x^2$ ergibt?
Machen Sie auch die Probe.

Z1 a) $L(x,y,\lambda) = -2x - 4y + 1 + \lambda \cdot (x^2 + 2y^2 - 1)$

$$L_x = -2 + 2\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{x}$$
$$L_y = -4 + 4\lambda y = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{y}$$
$$> x = y$$
$$L_\lambda = x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow \text{(I)}\ x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \lambda = \sqrt{3}$$

oder

$$\text{(II)}\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \lambda = -\sqrt{3}$$

$$L_{xx} = 2\lambda \quad L_{x\lambda} = 2x$$
$$L_{xy} = 0 \quad L_{y\lambda} = 4y$$
$$L_{yy} = 4\lambda \quad L_{\lambda\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow H = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 4\lambda & 4y \\ 2x & 4y & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 4\lambda \\ 2x & 4y \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \det H = -16\lambda x^2 - 32\lambda y^2$$

(I) $\det H < 0 \Rightarrow$ Min.

(II) $\det H > 0 \Rightarrow$ Max mit $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 4\frac{1}{\sqrt{3}} + 1$

$$= 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 1$$

b) $\underbrace{x^2 + 2y^2 - 1}_{F(x)} = 0 \qquad x_0 = \frac{-1}{\sqrt{3}} \quad y_0 = \frac{-1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow F(x_0, y_0) = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} - 1$

$$= 0$$

$F_x = 2x$

$F_y = 4y \Rightarrow$

$$y'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} = -\frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = -\frac{1}{2}.$$

Z2|

x	0	1	4	9	
y	1	4	12	15	
$\sqrt{x}$	0	1	2	3	$\Sigma = 6$

$$\left(\begin{array}{cc|c} n & \Sigma\sqrt{x} & \Sigma y \\ \Sigma\sqrt{x} & \Sigma(\sqrt{x})^2 & \Sigma\sqrt{x}\cdot y \end{array}\right)$$

$n = 4$ $\quad \Sigma(\sqrt{x})^2 = \Sigma x = 14$

$\Sigma\sqrt{x} = 6 \quad \Sigma y = 32$

$\Sigma\sqrt{x}\cdot y = 4 + 24 + 45 = 73$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 32 \\ 6 & 14 & 73 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 16 \\ 0 & 5 & 25 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow 5b = 25 \Rightarrow b = 5 \qquad 2a + 15 = 16 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2} + 5\cdot\sqrt{x}$

Z3| $\quad y' - \frac{1}{t}y = -a \qquad y(1) = 100 \qquad$ Var. d. Konst.

$y' = \frac{1}{t}\cdot y \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{t}\,dt \Leftrightarrow \ln(y) = \ln(t) + \hat{c}$

$y = c\cdot t$

Var.: $\quad y = c(t)\cdot t \Rightarrow y'(t) = c'(t)\cdot t + \underbrace{c(t)\cdot 1}_{\frac{1}{t}\cdot y}$

$\frac{1}{t}\cdot t$

$\Rightarrow c'(t)\cdot t = -a$

$\Rightarrow c'(t) = -\frac{a}{t}$

$c(t) = -a\cdot\ln(t) + c \Longrightarrow y = (-a\cdot\ln(t) + c)\cdot t$

$y(1) = c \overset{!}{=} 100 \Rightarrow y = (-a\ln(t) + 100)\cdot t$

24/ $y' = y + x \Rightarrow y' - y = x$ konst. Koeff.

$\Rightarrow y_h = ce^x$ $\quad y_p = ax + b$

$y_p' = a \Rightarrow a - (ax + b) = x$

$\Rightarrow a = -1$

$\Rightarrow -1 - b = 0 \Rightarrow b = -1$

$\Rightarrow y_p = -x - 1$

$\Rightarrow y = ce^x - x - 1$ $\quad y(0) = 1 \Rightarrow c - 1 = 1 \Rightarrow c = 2$

$\Rightarrow y = 2e^x - x - 1 \Rightarrow y(1) = 2e - 2 \approx 3,44$

Numerisch:

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i) = y_i + x_i$
0	0	1	1
1	0,2	$1 + 0,2 = 1,2$	1,4
2	0,4	$1,2 + 0,2 \cdot 1,4 = 1,48$	1,88
3	0,6	1,86	2,46
4	0,8	2,35	3,15
5	1	2,98	

Z5| $f(x,y) = x^2 y \Rightarrow \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \operatorname{grad} f\,(x_0 = 1, y_0 = 2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Richtungsableitung: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow D_v(f) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 16$

Steigung $m = \dfrac{D_v(f)}{\|\vec{v}\|} = \dfrac{16}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{16}{5} = 3{,}2$

Z6| $y(1) = 2, \quad \dfrac{y}{y'} = x^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{y} y' = \dfrac{1}{x^2}$

$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x^2}\,dx \Leftrightarrow \ln(y) = -\frac{1}{x} + \tilde{c}$

$\Leftrightarrow y(x) = c \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ Allg. Lsg. der DGL

AWP: $y(1) = c \cdot e^{-1} = c \cdot \frac{1}{e} \overset{!}{=} 2 \Rightarrow c = 2e$

$\Rightarrow y(x) = 2e \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ Spez. Lsg. des AWP

Probe: $y(1) = 2e \cdot \frac{1}{e} = 2$ ✓ $\quad y'(x) = 2e \cdot \left(+\frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}}$

$\Rightarrow \dfrac{y}{y'} = \dfrac{2e\, e^{-\frac{1}{x}}}{2e \cdot \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{\frac{1}{x^2}} = x^2$ ✓