1) Sie vermuten bei der unten stehenden Stichprobe einen Zusammenhang zwischen x und y gemäß $y = a + b \cdot x$ oder $y = a + b \cdot \sqrt{x}$. Berechnen Sie für beide Ansätze mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate die Koeffizienten a und b, zeichnen Messwerte und Funktionen in einen Graph und bewerten Sie, welches das bessere Ergebnis ist.

i (Meßwert Nr.)	x_i	y_i
1	1	3
2	4	5
3	9	7
4	16	9

2) Wie lautet die Tangentialebene an der Stelle $x_0 = 1$ und $y_0 = 2$ der Funktion $f(x,y) = x^2y^3$?

3) Berechnen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = (e^y - 1) \cdot (x - 2)$$

4) a) Welcher Punkt auf der Ellipse, die durch $x^2 + 2y^2 = 1$ beschrieben ist, hat den grössten Funktionswert zu $f(x,y) = -2x - 4y + 1$?

b) Wie gross ist in diesem Punkt der Ellipse (als Kontur in der x-y-Ebene) die Steigung?

5) a) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^5 = -1$$

Geben Sie auch die erste Lösung in kartesischen Koordinaten an und mamchen Sie die Probe.

b) Berechnen Sie zur zweiten Lösung z_2 den Wert von z_2^{101}

1) $y = a + bx$

a)

$\sum x = 30$
$\sum x^2 = 1 + 16 + 81 + 256 = 354$
$\sum y = 24$
$\sum xy = 230$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 30 & 24 \\ 30 & 354 & 230 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 15 & 12 \\ 0 & 129 & 50 \end{array}\right)$

$\Rightarrow b = \frac{50}{129} \quad 2a + \frac{750}{129} = 12 \Rightarrow 2a = \frac{798}{129} \Rightarrow a = \frac{399}{129}$

$\Rightarrow y = \frac{399}{129} + \frac{50}{129}x$

---

b) $\sqrt{x}$: 1, 2, 3, 4

$\sum \sqrt{x} = 10$
$\sum (\sqrt{x})^2 = 30$
$\sum \sqrt{x} \cdot y = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 = 70$
$\sum y = 24$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 10 & 24 \\ 10 & 30 & 70 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow b = 2$

$\Rightarrow a + 3 \cdot 2 = 7 \Rightarrow a = 1$

$\Rightarrow y = 1 + 2\sqrt{x}$

---

2)

$f(x,y) = x^2 y^3$
$f_x(x,y) = 2xy^3$
$f_y(x,y) = 3x^2y^2$

$f(1,2) = 8$
$f_x(1,2) = 16$
$f_y(1,2) = 12$

$\Rightarrow f_1(x,y) = 8 + 16 \cdot (x-1) + 12 \cdot (x-2)$

$f(x,y) = (e^y - 1)(x-2)$

Notwendig: $f_x = e^y - 1 = 0 \Rightarrow e^y - 1 \Rightarrow y = 0$

$f_y = (x-2)\cdot e^y = 0 \rightarrow x = 2$

$f_{xx} = 0$

$f_{xy} = e^y$

$f_{yy} = (x-2)e^y$

$\Rightarrow H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H = -1 < 0$

$\Rightarrow$ Sattelpkt

4) $f(x,y) = -2x - 4y + 1 \qquad g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$

$L(x,y,\lambda) = -2x - 4y + 1 - \lambda\cdot(x^2 + 2y^2 - 1)$

$L_x = -2 - 2\lambda x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \cancel{\lambda = 0} \quad \cancel{\lambda x = 0} \quad -\lambda x = 1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{x}$

$L_y = -4 - 4\lambda y = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{y} \Rightarrow \boxed{x = y}$

$L_\lambda = x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

(1) $x = y = \sqrt{\frac{1}{3}}, \lambda = -\sqrt{3}$ (2) $x = y = -\sqrt{\frac{1}{3}}, \lambda = \sqrt{3}$

$$H = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & -4\lambda & 4y \\ 2x & 4y & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2\lambda & 0 \\ 0 & -4\lambda \\ 2x & 4y \end{matrix}$$

$\det H = 16x^2\lambda + 32y^2\lambda$

(1) $\det H < 0$ Min.

(2) $\det H > 0$ Max.

b)

$$F(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$$

$F_x = 2x$

$F_y = 4y$ $\quad \Rightarrow y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{4y}$

$\Rightarrow$ ① aus a) bzw ②

$$\Rightarrow y'\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) = y'\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) = -\frac{1}{2}$$

5| a) $z^5 = -1 = 1 \cdot e^{i\,180^\circ}$ $\quad \hat{r} = 1, \hat{\varphi} = 180^\circ$

$r = \sqrt[5]{1} = 1$

$\varphi_0 = \frac{180^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{5} = 36^\circ$ $\quad \Rightarrow z_0 = 1 \cdot e^{i \cdot 36^\circ}$

$\varphi_1 = \frac{180^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{5} = 108^\circ$ $\quad z_1 = 1 \cdot e^{i \cdot 108^\circ}$

$\varphi_2 = 180^\circ$ $\quad z_2 = 1 \cdot e^{i\,180^\circ}$

$\varphi_3 = 252^\circ$ $\quad z_3 = 1 \cdot e^{i\,252^\circ}$

$\varphi_4 = 324^\circ$ $\quad z_4 = 1 \cdot e^{i\,324^\circ}$

b) $z_2^{101} = z_2^{100}\, z_2 = (\underbrace{z_2^5}_{-1})^{20}\, z_2 = z_2$